Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie
TUM Sommersemester 2012
Dozent: Javier Esparza

Janosch Maier

25. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1 Grundlagen

- Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ von Elementarereignissen
- Elementarwahrscheinlichkeit: $\Pr[\omega_1]$.
- $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
- Ereignis: $E \subseteq \Omega$ besteht aus Elementarereignissen
- $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$

Mehrstufiges Experiment

- Reihe von Teilereignissen
- Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses ist Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse

1.1 Markov-Diagram

Graph mit Übergangswahrscheinlichkeit

1.2 Additionssatz

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_i, i \in [n]$ gilt:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] \tag{1}$$

Für zwei disjunkte Ereignisse gilt somit: $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$

1.3 Siebformel

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{i \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + -... \\ +(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_l \leq n} &\Pr[A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_l}] + -... + (-1)^{n-1} \Pr[A_1 \cap ... \cap A_n] \end{aligned} \tag{2}$$

Für zwei Ereignisse gilt somit: $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$

1.4 Bool'sche Ungleichung

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] \tag{3}$$

1.5 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Laplace Experiment: $\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \tag{4}$$

2.1 Multiplikationssatz

Für $\Pr[A_1 \cap ... \cap A_n] > 0$ gilt:

$$\Pr[A_1 \cap ... \cap A_n] = \Pr[A_1]\Pr[A_2|A_1]\Pr[A_3|A_1 \cap A_2] ... \Pr[A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}] \tag{5}$$

Für zwei Ereignisse gilt somit: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B|A] = \Pr[B]\Pr[A|B]$

2.2 Geburtstagsproblem

- m Bälle in n Körbe, W'keit, dass schon ein Ball in Korb liegt?
- A_i: Ball i in leerem Korb
- A: Alle Bälle alleine in Korb

$$\Pr[A] = \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right] \overset{\text{Multiplikationssatz}}{=} \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \overset{1-x \leq e^{-x}}{\leq} e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} \tag{6}$$

2.3 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$A_i, i \in [n]$ paarweise disjunkt, $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i]\Pr[A_i] \tag{7}$$

3 Unabhängigkeit

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A]\Pr[B] \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ unabhängig} \tag{8}$$

Für $\Pr[B] \neq 0$ gilt $\Pr[A|B] = \Pr[A]$. Zwei unabhängige Ereignisse mit $\Pr > 0$ sind nicht disjunkt.

Mehrere Ereignisse sind unabhängig, wenn für alle Teilmengen aus der Ereignissmenge gilt:

$$\Pr[A_i \cap ... \cap A_j] = \Pr[A_i] ... \Pr[A_j], 1 \leq i \leq j \leq n \tag{9}$$

Wenn A, B unabhängig $\Rightarrow A, \overline{B}; \overline{A}, B; \overline{A}, \overline{B}$ sind unabhängig
Wenn A, B, C unabhängig $\Rightarrow A \cap B, C; A \cup B, C$ sind unabhängig

4 Satz von Bayes

Ereignisse $A_i, i \in [n]$ paarweise disjunkt, mit $\Pr[A_i] > 0$. $B \subseteq \bigcup_{i\in[n]} A_i$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i]\Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j]\Pr[A_j]} \tag{10}$$

Für zwei Ereignisse gilt also: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A]\Pr[A]}{\Pr[B]}$

5 Zufallsvariablen

5.1 Grundlagen

- Zufallsvariable: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (Diskret, wenn Ω endlich / abzählbar)
- Wertebereich einer ZV: $W_X = X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega; X(\omega) = x\}$
- Dichtefunktion: $x \to \Pr[X = x]$
- Verteilungsfunktion: $x \to \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \leq x} \Pr[X = x']$

5.2 Erwartungswert & Varianz

Erwartungswert bei absoluter Konvergenz:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in W_X} x \Pr[X = x] \tag{11}$$

5.2.1 Monotonie des Erwartungswertes

$$X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y] \tag{12}$$

$a \leq X(\omega) \leq b \Rightarrow a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$

5.2.2 Erwartungswert bei Funktionen

$Y = f(X) = f \circ X$ ist ZV.

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[f(X) = \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\Pr[\omega] \tag{13}$$

5.2.3 Linearität des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \tag{14}$$

5.2.4 Mehrere Zufallsvariablen

$W_X \subseteq \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] \tag{15}$$

5.2.5 Dichte

$$f_{X|A}(x) = \Pr[X = x|A] = \frac{\Pr[X = x \cap A]}{\Pr[A]} \tag{16}$$

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x f_{X|A}(x) \tag{17}$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse, die den ganzen Ereignissraum abdecken gilt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \Pr[A_i]$

Neustart eines Experiments X als Experiment X' mit selbem Aufbau. Erwartungswert des Experiments ist der Erwartungswert des neuen Experiments + 1:

$$\mathbb{E}[X|\overline{K_1}] = 1 + \mathbb{E}[X'] = 1 + \mathbb{E}[X] \tag{18}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|K_1] \Pr[K_1] + \mathbb{E}[X|\overline{K_1}] \Pr[\overline{K_1}] \tag{19}$$

5.2.6 Varianz

Mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ gilt:

$$\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \Pr[X = x] \tag{20}$$

$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}[X]}$ heißt Standardabweichung von X

$$\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \tag{21}$$

$$\operatorname{Var}[aX + b] = a^2 \operatorname{Var}[X] \tag{22}$$

Für ZV X heißt: $\mathbb{E}[X^k]$ k-tes Moment – $\mathbb{E}$ ist erstes Moment, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ k-tes zentrales Moment – Var ist zweites zentrales Moment.

5.3 Mehrere Zufallsvariablen

5.3.1 Hypergeometrische Verteilung

Ziehe r Elemente ohne zurücklegen aus $a + b$ Elementen, von denen b besonders gekennzeichnet sind.

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x}\binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}} \tag{23}$$

Für zwei ZV:

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{b}{x}\binom{a}{r_1-x}\binom{b-x}{y}\binom{a-(r_1-x)}{r_2-y}}{\binom{a+b}{r_1}\binom{(a+b)-r_1}{r_2}} \tag{24}$$

5.3.2 Gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y] \tag{25}$$

5.3.3 Randdichte

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \tag{26}$$

Analog für $f_Y(y)$

5.3.4 Gemeinsame Verteilung

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y') \tag{27}$$

5.3.5 Randverteilung

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y) \tag{28}$$

Analog für $F_Y(y)$

5.3.6 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

$X_i, i \in [n]$ heißen unabhängig, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] ... \Pr[X_n = x_n] \Leftrightarrow \\ f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) ... f_{X_n}(x_n) \end{aligned} \tag{29}$$

5.3.7 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

$Z = X + Y$, X, Y unabhängig.

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) f_Y(z - x) \tag{30}$$

5.3.8 Linearität des Erwartungswertes

$$X = a_1 X_1 + ... + a_n X_n \Rightarrow \mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + ... + a_n \mathbb{E}[X_n] \tag{31}$$

5.3.9 Multiplikativität des Erwartungswertes

Für unabhängige ZV gilt:

$$\mathbb{E}[X_1 ... X_n] = \mathbb{E}[X_1] ... \mathbb{E}[X_n] \tag{32}$$

5.3.10 Addizivität der Varianz

Für $X = \sum_{i \in [n]} X_i$, mit X_i unabhängig gilt:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1] + ... + \mathrm{Var}[X_n] \tag{33}$$

5.3.11 Indikatorvariable

I_A ist 1, wenn A, sonst 0

$$\mathbb{E}[I_A] = \Pr[A] \tag{34}$$

$$\mathbb{E}[I_{A_1} ... I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap ... \cap A_n] \tag{35}$$

6 Formelsammlung

Siehe Foliensatz Seite 154 ff.

7 Wichtige diskrete Verteilungen

7.1 Bernoulli-Verteilung

1 Münzwurf. Erfolg (1) auf einer Seite, Misserfolg (0) bei anderer Seite

ZV X mit: $W_X = \{0, 1\}$

$$f_X(X) = \begin{cases} p, x = 1 \\ 1 - p, x = 0 \end{cases} \tag{36}$$

ist Bernoulli verteilt, mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. $q := 1 - p$

$$\mathbb{E}[X] = p \tag{37}$$

$$\mathrm{Var}[X] = p - p^2 = pq \tag{38}$$

7.2 Binomialverteilung

Reihe von Münzwürfen. Summe der Erfolge?

X ist Summe von unabhängigen, gleichverteilten Bernoulli Experimenten $X_1 + ... + X_n$.

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p) \tag{39}$$

Es gilt: $X_X = \{0, ..., n\}$

$$f_X(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{40}$$

$$\mathbb{E}[X] = np \tag{41}$$

$$\mathrm{Var}[X] = npq \tag{42}$$

7.2.1 Mehrere unabhängige Binomialverteilungen

$X \sim \mathrm{Bin}(n_x, p), Y \sim \mathrm{Bin}(n_y, p)$ unabhängig dann gilt für $Z = X + Y \Rightarrow Z \sim \mathrm{Bin}(n_x + n_y, p)$

7.3 Geometrische Verteilung

Reihe von Münzwürfen. Wann der erste Erfolg?

$$f_X(i) = pq^{i-1} \qquad , i \in \mathbb{N} \tag{43}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \tag{44}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2} \tag{45}$$

$$\Pr[X > x] = (1 - p)^x \tag{46}$$

$$\Pr[X > y + x | X > x] = \Pr[X > y] \tag{47}$$

7.3.1 Negative Binomialverteilung

n unabhängige Geometrische Verteilungen. Warten auf den n-ten Erfolg. z ist Anzahl der Versuche. Z ist negativ binomialverteilt mit Ordnung n

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} p^n (1-p)^{z-n} \tag{48}$$

7.4 Poisson Verteilung

Parameter λ, Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}_0$. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \tag{49}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \tag{50}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \lambda \tag{51}$$

7.4.1 Grenzwert für Binomialverteilung

$$\lim_{n\to\infty} X \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) = \mathrm{Po}(\lambda) \tag{52}$$

7.4.2 Summe von Poisson-verteilten Zufallsvariablen

X, Y unabhängig. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda), Y \sim \mathrm{Po}(\mu)$

$$Z = X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu) \tag{53}$$

8 Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

8.1 Ungleichungen von Markov und Chebyshev

8.1.1 Markov-Ungleichung

Für ZV X mit nur positiven Werten, $t \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \tag{54}$$

$$\Pr[X \geq t\mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t} \tag{55}$$

8.1.2 Chebishev-Ungleichung

Für ZV X, $t \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2} \tag{56}$$

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}\, X}] \leq \frac{1}{t^2} \tag{57}$$

8.2 Gesetz der großen Zahlen

8.2.1 Gesetz der großen Zahlen

Für ZV X mit, $\epsilon, \delta > 0$ gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon\delta^2}$, Wenn $X_i, i \in [n]$ gleichverteilt, wie X mit $Z := \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$, so gilt:

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \epsilon \tag{58}$$

8.2.2 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

$$Z = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \tag{59}$$

nähert sich für genügend große n beliebig an $\Pr[X]$ an.

8.3 Chernoff-Schranken

8.3.1 Chrenoff-Schranken für Summen von 0-1-Zufallsvariablen

Seien $X_i, i \in [n]$ unabhängige Bernoulli-ZVs, mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_1$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i, \mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$

$\delta > 0$

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu \tag{60}$$

$0 < \delta < 1$

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^\mu \tag{61}$$

$0 \leq \delta < 1$

$$(1-\delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}} \tag{62}$$

$$(1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta + \frac{\delta^2}{3}} \tag{63}$$

8.3.2 Weitere Abschätzungen

- $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$, für $0 < \delta \leq 1$
- $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}}$, für $0 < \delta \leq 1$
- $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$, für $0 < \delta \leq 1$
- $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq (\frac{e}{1+\delta})^{(1+\delta)\mu}$
- $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$, für $t \geq 2e\mu$

9 Erzeugende Funktion

Für ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] s^k = \mathbb{E}[s^X] \tag{64}$$

9.1 Rechenregeln

Für $Y = X + t, t \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \mathbb{E}[s^(X + t)] = \mathbb{E}[s^t s^X] = s^t G_X(s) \tag{65}$$

Für ZVs X, Y gilt:

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s) \tag{66}$$

9.1.1 Beobachtung

- $G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr[X = k] s^{k-1}$
- $G'_X(0) = \Pr[X = 1]$
- $G_X^{(i)}(0) = \Pr[X = i] i!$
- $\frac{G_X^{(i)}(0)}{i!} = \Pr[X = i]$

9.2 Eindeutigkeit

Dichte und Verteilung einer ZV X sind durch wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion eindeutig bestimmt.

9.3 Wichtige Erzeugende Funktionen

9.3.1 Bernoulli-Verteilung

$$G_X(s) = (1 - p)s^0 + ps^1 = 1 - p + ps \tag{67}$$

9.3.2 Gleichverteilung auf {0, ..., n}

$\Pr[X = k] = \frac{1}{n+1}$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{(n+1)(s-1)} \tag{68}$$

9.3.3 Binomialverteilung

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (1 - p + ps)^n \tag{69}$$

9.3.4 Geometrische Verteilung

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} s^k = ps \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1 - (1-p)s} \tag{70}$$

9.3.5 Poisson-Verteilung

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda+\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \tag{71}$$

9.4 Erzeugende Funktion und Momente

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr[X = k] = \mathbb{E}[X] \tag{72}$$

Teil II
Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

10 Einführung

- Elementarereignisse haben Wahrscheinlichkeit 0
- Ereignismenge muss σ-Algebra sein
- Wahrscheinlichkeitsfunktion muss Kolmogorov-Axiome erfüllen

10.1 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

10.1.1 σ-Algebren

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn gilt

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$\mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra

10.1.2 Borel'sche Mengen

$\mathcal{B}(\Omega)$ mit Ω ist Intervall, bildet σ-Algebra

- Jedes geschlossene Subintervall von $\Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$
- $A \in \mathcal{B}(\Omega) \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$
- $A_n \in \mathcal{B}(\Omega) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$

10.1.3 Kolmogorov-Axiome

Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pr[.] : \mathcal{A} \to [0, 1] \tag{73}$$

- $\Pr[\Omega] = 1$
- $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$

Beispiele

- Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ erfüllt $\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} f(\omega)$ die Kolomogorov-Axiome für alle $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$
- Für $\Omega = [0, 1,]$ gibt es nur eine Funktion $\mathcal{B}([0, 1]) \to \mathbb{R}$, mit $F([a, b]) = b - a$, die die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

10.1.4 Lebesgue-Integral

Ω ist Intervall. $f : \Omega \to R$ ist messbar, wenn Urbild einer Borel'schen Menge auch Borel'sche Menge.

Jeder messbaren Funktion kann ein Lebesgue-Integral zuxgeordnet werden.

$$\int f d\lambda \tag{74}$$

Stetige Funktion sind messbar. Summen, Produkte von Messbaren Funktionen sind messbar.

Ist $f : \Omega \to R[+]_0$ messbar, erfüllt Pr die Kolmogorov-Axiome für

$$\Pr : A \to \int f I_A d\lambda \tag{75}$$

Für $A = [a, b]; a, b \in \mathbb{R}; f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$$\int f I_A d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{76}$$

10.1.5 Rechenregeln in $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$

- $\Pr[\emptyset] = 0$
- $\Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
- $\Pr[\overline{A}] = 1 - \Pr[A]$
- $A \subseteq B \Rightarrow \Pr[A] \leq \Pr[B]$

10.1.6 Additionssatz

$A_i, i \in [n]$ paarweise disjunkt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_1] \tag{77}$$

Für zwei disjunkte Ereignisse gilt somit $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$

10.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

$\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

10.2.1 Dichtefunktion

Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{78}$$

10.2.2 Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion F_X:

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} | t \leq x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{79}$$

- F_X ist monoton steigend
- F_X ist stetig
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F_X = 1$
- Differenzierbare Funktion $F(x)$ besitzt Dichte $f(x) = F'(x)$
- $\Pr[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

10.2.3 Gleichverteilung

Gleichverteilung über $[a, b]$. Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{80}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{81}$$

- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$
- $\text{Var}[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

10.2.4 Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen

$Y = g(X), g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, C = \{t \in \mathbb{R} | g(t) \leq y\}$ Verteilungsfunktion:

$$F_X(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[g(X) \leq y] = \int_C f_X(t)dt \tag{82}$$

Dichte folgt durch Differenziation

10.2.5 Exponentialverteilung

X gleichverteilt auf $]0, 1[, \lambda > 0, Y := -\frac{1}{\lambda} \ln X$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr[-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq y] = \Pr[X \geq e^{-\lambda y}] \\ &= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{83}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{84}$$

10.2.6 Lineare Zufallsvariablen

$Y = aX + b; a, b > 0$

$$F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a}) \tag{85}$$

$$f_y(y) = f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a} \tag{86}$$

10.2.7 Simulation von Zufallsvariablen

Erzeugung von Zufallswerten mit Verteilung X entsprechend, über verschieden große Intervalle einer Gleichverteilung U über $]0, 1[$.

$$\tilde{X} = F_X^{-1}(U) \tag{87}$$

$$\Pr[\tilde{X} \leq t] = \Pr[U \leq F_X(t)] = F_U(F_X(t)) = F_X(t) \tag{88}$$

10.2.8 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

$\delta > 0, n \in \mathbb{Z}$:

$$X_\delta = n\delta \Leftrightarrow X \in [n\delta, (n+1)\delta[\tag{89}$$

$$\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta) \tag{90}$$

10.2.9 Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt \tag{91}$$

$Y = g(X)$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt \tag{92}$$

10.2.10 Varianz

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 f_X(t) dt \tag{93}$$

10.2.11 Laplace-Prinzip

Gleichwahrscheinlich im kontinuierlichen Fall eventuell unklar.

10.2.12 Bertrand'sches Paradoxon

Sehne im Einheitskreis länger, als $\sqrt{3}$ (Seite eines gleichseitiges Dreieck)? Lösungen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

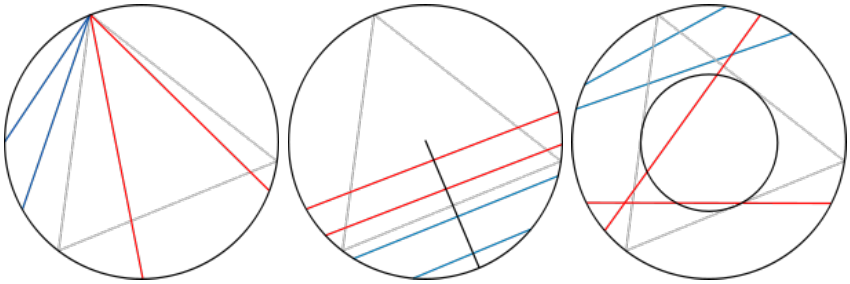

Abbildung 1:

10.3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

10.3.1 Mehrdimensionale Dichten

Integrierbare Dichtefunktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1 \tag{94}$$

Für $A \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy \tag{95}$$

Bereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{96}$$

10.3.2 Randverteilung

von X

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \right] du \tag{97}$$

Analog für Y möglich

10.3.3 Randdichte

von X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) dv \tag{98}$$

Analog für Y möglich

10.3.4 Unabhängigkeit

Mehrere Zufallsvariablen sind unabhängig, wenn gilt:

$$\begin{gathered} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n) \Longleftrightarrow \\ f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_n}(x_n), \forall x_i \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{99}$$

Für zwei Zufallsvariablen gilt insbesondere unabhängigkeit bei:

$$\begin{gathered} \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \Pr[Y \leq y]; \forall x, y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \\ F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \Longleftrightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \end{gathered} \tag{100}$$

10.3.5 Summe von unabhängigen Zufallsvariablen

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \tag{101}$$

11 Normalverteilung

Kontinuierliche Analogie zur Binomialverteilung, wenn $n \to \infty$. Dichtefunktion für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} =: \varphi(x, \mu, \sigma) \tag{102}$$

$\mathcal{N}(0,1)$ ist Standardnormalverteilung. $\varphi(x, 0, 1) = \varphi(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt =: \Phi(x, \mu, \sigma) \tag{103}$$

ist Gauß'sche Φ-Funktion.

11.1 Erwartungswert und Varianz

11.1.1 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \tag{104}$$

$\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{Var}[X] = 1$

11.1.2 Allgemeiner Fall

Lineare Transformation

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), Y = aX + b \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2) \tag{105}$$

Eigenschaften von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$
- $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt

11.2 Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

11.2.1 Grenzwertsatz von de Moivre

Seien $X_i, i \in [n]$ unabhängige Bernoulli-verteilte ZV, mit gleicher erfolgswarhscheinlichkeit p, dann gilt für $H_n := \sum_{i=1}^{n}, n \geq 1$:

$$H_n^* = \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{106}$$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung.

11.2.2 Konvergenz der Binomialverteilung

$H_n \sim \text{Bin}(n, p)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = \mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n}) \tag{107}$$

Für Folge Z_n mit Verteilungsfunktionen F_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), x \in \mathbb{R} \tag{108}$$

Z_n konvergiert gegen Standardnormalverteilung für $n \to \infty$

11.3 Summe von Normalverteilungen

11.3.1 Additivität der Normalverteilung

Seien $X_i, i \in [n]$ unabhängige ZV mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann gilt für $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$,

- Z ist normalverteilt
- $\mathbb{E}[Z] = \mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$
- $\text{Var}[Z] = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$

12 Zentraler Grenzwertsatz

Je mehr unabhängige Zufallsvariablen addiert werden, um so mehr nähert sich die Summe der Normalverteilung an.

12.1 Momentenerzeugende Funktion

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} f_X(t) dt \tag{109}$$

12.1.1 Gleichverteilung auf $[a, b]$

$$M_U(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \tag{110}$$

12.1.2 Standardnormalverteilung

$$M_N(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \tag{111}$$

12.1.3 Normalverteilung $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$M_Y(t) = e^{\frac{t\mu + (t\sigma)^2}{2}} \tag{112}$$

12.2 Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_i, i \in [n]$ ZV mit selber Verteilung, unabhängig. $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n, n \geq 0$. Dann folgt

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{113}$$

sind asymptotisch standardnormalverteilt, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, für $n \to \infty$.

Für Folge H_n^* mit Verteilungsfunktionen F_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{114}$$

also H_n^* konvergiert gegen die Standardnormalverteilung für $n \to \infty$.

12.3 Elementarer Beweis des Grenzwertsatzes von de Moivre für $p = \frac{1}{2}$

Zeige, das gilt:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] \sim_\infty \int_a^b \varphi(t)dt \tag{115}$$

13 Exponentialverteilung

Kontinuierliche Analogie zur geometrischen Verteilung. Ebenfalls gedächtnislos.

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{116}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{117}$$

13.1 Erwartungswert und Varianz

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

13.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Seien X_n eine Folge geometrisch verteilter ZV mit $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pr[X_n \leq kn] = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{kn} \tag{118}$$

Für $Y_n = \frac{1}{n} X_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[Y_n \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \tag{119}$$

Die Folge Y_n von geometrisch verteilten ZV geht für $n \to \infty$ in eine exponentialverteilte ZV über.

13.3 Gedächtnislosigkeit

13.3.1 Skalierung exponentialverteilter Variablen

Für X exponentialverteilte ZV mit Parameter λ ist $Y = aX$ wieder exponentialverteilt mit Parameter $\frac{\lambda}{a}$

13.3.2 Gedächtnislosigkeit

ZV X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist exponentialverteilt gdw, $\forall x, y > 0$ gilt:

$$\Pr[X > x + y | X > y] = \Pr[X > x] \tag{120}$$

13.4 Minimum von Exponentialverteilungen

13.4.1 Warten auf mehrere Ereignisse

Seien $X_i, i \in [n]$ unabhängig, exponentialverteilt mit λ_i. Dann gilt: $X := \min\{X_1, ..., X_n\}$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\sum_{i\in[n]} \lambda_i$.

13.4.2 Poisson-Prozess

Ergebnisse, zeitlicher Abstand exponentialverteilt $\Rightarrow$ Anzahl in fester Zeitspanne ist Poisson-verteilt.

$T_1, T_2, ...$ unabhängige exponentialverteilte ZV mit Parameter λ. T_i ist die Zeit zwischen Treffer $i-1$ und i. So ist definiert:

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N} | T_1 + ... + T_n \le t\} \tag{121}$$

$X(t)$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $t\lambda$.

14 Approximationen der Binomialverteilung

Sei $H_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ binomialverteilt mit Verteilungsfunktion F_n. Für $n \to \infty$ gilt:

$$F_n(t) = \Pr\left[\frac{H_n}{n} \le \frac{t}{n}\right] \to \Phi\left(\frac{\frac{t}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{t - np}{\sqrt{p(1-p)n}}\right) \tag{122}$$

Stetigkeitskorrektur: Ansatz $+0,5$ im Zähler.

14.1 Approximation durch Poisson-Verteilung

$\mathrm{Bin}(n, p) \sim \mathrm{Po}(np)$, bei seltenen Ereignissen. $n \ge 30$, $p \le 0,05$

14.2 Approximation durch Chrenoff-Schranken

Bei Berechnung der Ausläufer. Echte Abschätzung, nicht nur Approximation.

14.3 Approximation durch Normalverteilung

$F_n(t)$ von $\mathrm{Bin}(n, p)$ approximiert durch:

$$F_n(t) \approx \Phi\left(\frac{t - np}{\sqrt{p(1-p)n}}\right) \tag{123}$$

bei $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.

Teil III
Induktive Statistik

15 Einführung

Erschließen von Gesetzmäßigkeiten aus gemessenen Zufallsgrößen

16 Schätzvariablen

- Verteilung von X bekannt, Parameter nicht
- n Stichproben mit gleicher Verteilung, wie X, Stichprobenvariablen X_i

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X] \tag{124}$$

$\overline{X}$ ist erwartungstreuer Schätzer für X.

16.1 Schätzer

ZV X mit Dichte $f(x;\theta)$. Schätzer U für θ ist ZV aus mehreren (unabhänigigen, identische verteilten) ZV.

16.1.1 Erwartungstreue

Erwartungstreu, wenn gilt:

$$E[U] = \theta \tag{125}$$

16.1.2 Bias

$$E[U - \theta] \tag{126}$$

0, bei erwartungstreuen Schätzern

16.1.3 Mittlere Quadratische Abweichung

$$MSE := \mathbb{E}[(U-\theta)^2] \tag{127}$$

Bei Erwartungstreue:

$$MSE = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}[U])^2] = \mathrm{Var}[U] \tag{128}$$

Schätzvariable ist effizienter, wenn kleinere mittlere quadratische Abweichung

16.1.4 Konsistenz im quadratischen Mittel

$MSE \to 0$ für $n \to \infty$

$$MSE(\overline{X}) = Var[\overline{X}] = \frac{1}{n}Var[X] \tag{129}$$

$\overline{X}$ ist also konsistent

16.1.5 Schwache Konsistenz

Folgt aus Konsistenz im quadratischen Mittel. Für $n \to \infty$, $\epsilon > 0$ beliebig:

$$\Pr[|\overline{X} - \theta| \geq \epsilon] \to 0 \tag{130}$$

16.1.6 Schätzer für die Varianz

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \tag{131}$$

$$\mathbb{E}[S^2] = \mathrm{Var}[X] \tag{132}$$

S^2 ist erwartungstreuer Schätzer für die Varianz

16.1.7 Stichprobenmittel & Stichprobenvarianz

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{133}$$

$$S^2 = \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{134}$$

sind erwartungstreue Schätzer für Erwartungswert bzw. Varianz

16.2 Maximum-Likelihood-Prinzip

$\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$. $f(x; \theta) = \Pr[X = x]$ mit θ als Parameter der Verteilung.

$$L(\vec{x}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \Pr_\theta[X_i = x_i] \overset{unabh.}{=} \Pr_\theta[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] \tag{135}$$

L ist Likelihood-Funktion der Stichprobe. Wähle θ, dass $L(x; \theta)$ maximal. $\hat{\theta}$ ist Maximu-Likelihood(ML)-Schätzwert

$$L(\vec{x}; \theta) \leq L(\vec{x}; \hat{\theta}) \quad \forall \theta \tag{136}$$

16.2.1 Bernoulli-Verteilung

$$L(\vec{x}; p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \tag{137}$$

Logarithmieren (wegen Summe), Ableiten, Nullsetzen: $p = \overline{x}$.

Varianz: $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

17 Konfidenzintervalle

Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\Pr[U_1 \leq \theta \leq U_2] \geq 1-\alpha \tag{138}$$

Wahrscheinlichkeit, dass $\theta \notin [U_1, U_2]$ (Konfidenzintervall) Wahrscheinlichkeit α.
Meist Schätzvariable U mit Konfidenzintervall $[U-\delta, U+\delta]$

17.1 Konfidenzintevall für Standardnormalverteilung

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}$.
Konfidenzintervall $[-c, c]$: $\Pr[-c \leq Z \leq c] \overset{!}{=} 1-\alpha$. Nach μ Auflösen.

$$K = \left[\overline{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{139}$$

$c = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

17.1.1 γ-Quantil

ZV X mit Verteilung F_X.

$$F_X(x_y) = \gamma \tag{140}$$

heißt γ-Quantil.
Für Standardnormalverteilung ist z_γ das γ-Quantil
$\Rightarrow$

$$K = \left[\overline{X} - \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{141}$$

18 Testen von Hypothesen

18.1 Einführung

Parameter nicht interessant, sondern damit verbundene Behauptung.

18.1.1 Test

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \vec{x}\text{Ablehnung der Hypothese}\} \tag{142}$$

heißts kritischer Bereich / Ablehnungsbereich
Testvariable T aus Zusammenfassung der $X_1, ..., X_n$. Einteilung von T in Bereiche, zur Ablehnung / Annahme der Hypothese. Zweiseitiger Test, bei geschlossenem Intervall; einseitig, bei einseitig halboffenem Intervall.
$\tilde{K} \in \mathbb{R} \hat{=} K$ aus T ist Abhlehnungsbereich.
H_0 ist Nullhypothese, H_1 alternative Hypothese. Bei $H_1 \hat{=} H_0$ gilt nicht, ist H_1 triviale Alternative.

18.1.2 Fehler

- 1. Art: H_0 gilt, wird aber abgelehnt ($\vec{x} \in K$)
- 2. Art: H_0 gilt nicht, wird aber angenommen ($\vec{x} \notin K$)

Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, α heißt Signifikanzniveau.

18.1.3 Konstruktion eines einfachen Tests

Test für p von $X \sim \text{Ber}(p)$. $H_0 : p \geq p_0, H_1 : p < p_0$. Wähle $k \in \mathbb{R}$ für $K := [0, k]$ optimal.

$$\tilde{T} = \frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{143}$$

Signifikanzniveau α für Test mit k

- Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art = $\max_{p \in H_0} \Pr_p[T \leq k]$
- Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art = $\sup_{p \in H_1} \Pr_p[T > k]$

$$\alpha = \Pr_{p=p_0}[T \leq k] = \Pr\left[\tilde{T} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right] \approx \Phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0}}\right) \tag{144}$$

- k vorgegeben: $(k - np_0)/\sqrt{np_0(1-p_0)} = z_\alpha \Rightarrow$ Signifikanzniveau $= \alpha$
- α vorgegeben: $k = k(n) = z_\alpha \sqrt{np_0(1-p_0)} + np_0$
- k kleiner $\Rightarrow$ Fehler 1. Art kleine, aber Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art steigt.
- Alternativtest: Hinreichende Stichproben, beide Fehlerwahrscheinlichkeiten ausreichend klein

18.2 Praktische Anwendung statistischer Tests

Siehe Vorlesungsfolien Seite 387.

18.3 Vorgehen bei statistischen Tests

1. Annahmen (über Verteilung, Unabhängigkeit) treffen
2. H_0 formulieren
3. Testverfahren wählen
4. Test durchführen & entscheiden

18.4 Ausgewählte statistische Tests

18.4.1 Das richtige Testverfahren

- Beteiligte Zufallsgrößen: Ein-Stichproben-Test (Nur eine ZV) / Zwei-Stichproben-Test (Vergleichen von ZVs)
- Nullhypothese
  - Lageparameter (Erwartungswert, Varianz, Median)
  - Vorgegebene Verteilung
  - Abhängigkeit
- Zufallsgrößen (Verteilung, Erwartungswert, Varianz bekannt?)

18.4.2 Ein-Stichproben-Tests für Lageparameter

Gaußtest (n konvergiert gegen Normalverteilung). Varianz σ^2 muss bekannt sein.

Siehe Vorlesungsfolien Seite 394.

t-Test Annäherung von σ^2 durch S^2. Für $n \geq 30$ annäherung durch Normalverteilung

Siehe Vorlesungsfolien Seite 396.

18.4.3 Zwei-Stichproben-Tests für Lageparameter

Siehe Vorlesungsfolien Seite 401.

18.4.4 Nicht an Legeparametern orientierte Tests

$\mathcal{X}^2$-Anpassungstest Untersuchung der Verteilung als ganzes.

Siehe Vorlesungsfolien Seite 404.

Teil IV

Stochastische Prozesse

19 Einführung

Stochastischer Prozess ist zeitliche Folge von Zufallsexperimenten

20 Prozesse mit diskreter Zeit

20.1 Markov-Ketten

Markov-Kette über Zustandsmenge $S = \{0, ..., n-1\}$ besteht aus unendlicher Folge von ZV $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Wertemenge S, Startverteilung q_0 mit $q_0^T \in \mathbb{R}^n$, mit Komponenten ≥ 0 und Summe 1.

Für Indexmenge $I \subseteq \{0, ..., t-1\}$ und Zustände $i, j, s_k (k \in I)$ gilt:

$$\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i, \forall k \in I : X_k = s_k] = \Pr[X_{t+1} = j | X_t = i] =: p_{ij} \tag{145}$$

- Markov-Bedinung (145) besagt: Übergangswahrscheinlichkeit nur abhängig von aktuellem Zustand.
- p_{ij} und t unabhängig: Markov-Kette ist (zeit)homogen. Übergangsmatrix: $P = (p_{ij})_{0\leq i,j<n}$. Absolute Zeit t hat keinen Einfluss auf System
- $S = \mathbb{N}_0$ möglich: unendliche Markov-Kette

20.1.1 Wahrscheinlichkeitsraum einer Markov-Kette

Mögliche Folge von Zuständen $\Omega \subseteq S^{t_0+1}$. Folge $\omega = (x_0, x_1, ..., x_{t_0}) \in \Omega$ hat Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr[\omega] = (q_0)_{x_0} \cdot \prod_{i=1}^{t_0} \Pr[X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}] \tag{146}$$

20.2 Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten

Situation zum Zeitpunkt t ist Zeilenvektor q_t, mit $(q_t)_i$ ist Wahrscheinlichkeit, dass sich Kette nach t Schritten in Zustand i befindet.

$$\Pr[X_{t+1} = k] = \sum_{i=0}^{n-1} \Pr[X_{t+1} = k | X_t = i] \cdot \Pr[X_t = i] \tag{147}$$

$$(q_{t+1})_k = \sum_{i=0}^{n-1} p_{ik} \cdot (q_t)_i \tag{148}$$

$$q_{t+1} = q_t \cdot P \tag{149}$$

$$q_t = q_0 \cdot P^t \tag{150}$$

$$q_{t+k} = q_t \cdot P^k \tag{151}$$

P^k gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit in k Schritten ein Übergang von i nach j erfolgt.

$$p_{ij}^{(k)} = \Pr[X_{t+k} = j | X_t = i] = (P^k)_{ij} \tag{152}$$

20.2.1 Exponentiation von Matrizen

Wenn P diagonalisierbar, so lässt sich P transformieren als:

$$P^k = B \cdot D^k \cdot B^{-1} \tag{153}$$

Zur Berechnung: 1 ist immer Eigenwert von $P \Rightarrow$ Polynomdivision

20.3 Ankunftswahrscheinlichkeiten und Übergangszeiten

- Wahrscheinlichkeit irgendwann von i nach j zu kommen
- Mittel der Schritte um von i nach j zu kommen

ZV T_{ij}, Übergangszeit zählt Schritte von i nach j

$$T_{ij} = \min\{n \geq 0 | X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\} \tag{154}$$

$$h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] \tag{155}$$

f_{ij}, Ankunftswahrscheinlichkeit ist Wahrscheinlichkeit, in beliebig vielen Schritten von i nach j zu kommen:

$$f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] \tag{156}$$

T_i, Rückkehrzeit zählt Schritte, um von i nach i zurückzukehren.

$$T_i = \min\{n \geq 1 | X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\} \tag{157}$$

$$h_i = \mathbb{E}[T_i] \tag{158}$$

f_i, Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_i = \Pr[T_i < \infty] \tag{159}$$

20.3.1 Erwartete Übergangs-/ Rückkehrzeiten

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj}, \forall i, j \in S, i \neq j \tag{160}$$

$$h_j = 1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} \tag{161}$$

20.3.2 Erwartete Ankunfsts- / Rückkehrwahrscheinlichkeiten

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}, \forall i, j \in S, i \neq j \tag{162}$$

$$f_j = p_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{jk} f_{kj} \tag{163}$$

20.4 Gamblers Ruin Problem

Markov-Kette mit m Zuständen, entpsricht m Geldeinheiten im Spiel. Zustandsübergang mit Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler A p bzw. Spieler B $1 - p$.

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A Spieler B bankrott treibt:

$$f_{jm} = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^j}{1 - (\frac{1-p}{p})^m}, p \neq \frac{1}{2} \tag{164}$$

Mittlere Spieldauer, bis ein Spieler Bankrott geht:

$$d_i = \mathbb{E}[T_i'] = qd_{i-1} + pd_{i+1} + 1 \leq mi \leq m^2 \tag{165}$$

20.5 Stationäre Verteilung

Verhalten für $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P^t = B \cdot \lim_{t\to\infty} (D^t) \cdot B^{-1} \tag{166}$$

$$\pi = \lim_{t\to\infty} q_t = \lim_{t\to\infty} q_0 P^t \tag{167}$$

π mit $\pi = \pi \cdot P$ ist Stationäre Verteilung

20.5.1 Absorbierende Zustände

Haben keine Ausgehenden kanten $p_{ij} = 0, \forall j \neq i \Rightarrow p_{ii} = 1$

20.5.2 Transiente Zustände

Prozess kehrt mit positiver Wahrscheinlichkeit nach Besuch in i nie mehr zurück: $f_i \leq 1$.

20.5.3 Rekurrente Zustände

$f_i = 1$

20.5.4 Irreduzible Markov-Ketten

$\forall i, j \in S. \exists n \in \mathbb{N}. p_{ij}^{(n)} > 0$. Jeder Zustand ist von jedem Zustand erreichbar. Endliche Markov-Kette $\Rightarrow$ Starke Zusammenhangskomponente.

Für diese gilt:

$$f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1. \forall i, j \in S \tag{168}$$

20.5.5 Aperiodizität

Periode ξ eines Zustands j ist die größte Zahl, so dass gilt (Rückkehr nur alle ξ Zustände möglich):

$$\{n \in \mathbb{N}_0 | p_{jj}^{(n)}\} \subseteq \{i \cdot \xi | i \in \mathbb{N}_0\} \tag{169}$$

Aperiodizität bei $\xi = 1$:

- Zustand besitzt Schleife

- Zustand besitzt zwei Rückkehrwege, deren Längen teilerfremd sind.

Zustand i ist aperiodisch, wenn gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}. p_{ii}^{(n)} > 0. \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \tag{170}$$

Markov-Kette ist aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

20.5.6 Ergodische Markov-Ketten

Für irreduzible aperiodische ($\hat{=}$ ergodisch) endliche Markov-Ketten gilt unabhängig von q_0:

$$\forall i \in S. \exists t \in \mathbb{N}. (q_t)_i > 0 \tag{171}$$

Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten

$$lim_{n \to \infty} q_n = \pi \tag{172}$$