Lineare Algebra für Informatiker
TUM Sommersemester 2011
Dozent: Christian Pötzsche

Janosch Maier

31. Juli 2011

Herzlichen Dank an Lucas Westermann, Florian Scheibner (https://github.com/lswest/LAMitschrift) und Michael Kern deren Mitschriften ich als Vorlage für Kapitel 2.4 genommen habe, sowie Michael Lettrich, Bernhard Schneider, Sebastian Speth und alle anderen, die mich auf Fehler hingewiesen haben.

Texte, die *kursiv* geschrieben sind, sind meine Anmerkungen, die hoffentlich zum Verständniss beitragen.

Ich kann leider nicht für die Richtigkeit dieser Mitschrift garantieren, habe aber versucht, so wenig Fehler, wie möglich zu machen.

Ich wünsche viel Spaß

Janosch Maier

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes **7**
1.1 Relationen . . . 7
1.1.1 Definiton: Relationen . . . 7
1.1.2 Beispiel . . . 7
1.1.3 Beispiel . . . 7
1.1.4 Beispiel . . . 8
1.1.5 Beispiel . . . 8
1.1.6 Bemerkung: Gerichtete Graphen . . . 8
1.1.7 Beispiel . . . 9
1.1.8 Definition: Äquivalenzrelationen . . . 9
1.1.9 Beispiel . . . 9
1.1.10 Beispiel . . . 9
1.2 Abbildungen . . . 10
1.2.1 Definition: Abblildung / Funktion . . . 10
1.2.2 Bemerkung . . . 10
1.2.3 Beispiel: Identische Abbildung . . . 11
1.2.4 Beispiel . . . 11
1.2.5 Beispiel . . . 12

1.2.6 Beispiel: ASCII-Code 12
1.2.7 Definition: Umkehrabbildung 12
1.2.8 Beispiel 12
1.2.9 Korrolar 12
1.3 Matrizen 12
1.3.1 Definiton: Matrix 13
1.3.2 Beispiel n-Tupeln, m-Spalten 13
1.3.3 Beispiel: Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrix . . 14
1.3.4 Beispiel: Diagonal- und Dreiecksmatrizen 14
1.3.5 Bemerkung 15
1.3.6 Beispiel 15
1.3.7 Beispiel 15
1.3.8 Beispiel: RGB-Raum 15
1.3.9 Beispiel: Inzidenzmatrix 16
1.3.10 Satz: Rechenregeln für Matrizen 16
1.4 Lineare Gleichungen 17
1.4.1 Definition: Lineare Gleichungen 17
1.4.2 Bemerkung 17
1.4.3 Satz: Superpositionsprinzip 17
1.4.4 Satz 17
1.4.5 Beispiel 18
1.4.6 Beispiel: Rückwärts-Substitution 18
1.4.7 Beispiel 19
1.4.8 Satz 20
1.4.9 Satz 20

2 Lineare Räume **22**
2.1 Algebraische Strukturen 22
2.1.1 Definition: Gruppe 22
2.1.2 Bemerkung 22
2.1.3 Bemerkung: Potenzen 22
2.1.4 Beispiel 23
2.1.5 Beispiel 23
2.1.6 Beispiel: Modulo 23
2.1.7 Beispiel: Symmetrische Gruppe 23
2.1.8 Korrolar: Rechnen in Gruppen 23
2.1.9 Definition: Körper 24
2.1.10 Beispiel 25
2.1.11 Beispiel: Restklassenkörper modulo p 25
2.1.12 Korolar 25
2.1.13 Bemerkung 26
2.2 Vektorräume 26
2.2.1 Linearer Raum, Vektorraum 26
2.2.2 Beispiel 27
2.2.3 Beispiel 27
2.2.4 Lösungsmenge Lg 27
2.2.5 Beispiel: Funktonenräume 27
2.2.6 Korolar 28
2.2.7 Definition Unterraum 28
2.2.8 Bemerkung 28

2.2.9 Beispiel: Stetige und stetig-differenzierbare Funtionen . . 28
2.2.10 Beispiel 28
2.2.11 Satz: Schnitte und Summen von Unterräumen 29
2.3 Lineare Abhängigkeit 29
2.3.1 Definiton: Spann 29
2.3.2 Beispiel 30
2.3.3 Beispiel: Monome 30
2.3.4 Proposition 30
2.3.5 Korrolar 30
2.3.6 Definition: Lineare Unabhängigkeit 31
2.3.7 Bemerkung 31
2.3.8 Beispiel 31
2.3.9 Poposition 31
2.3.10 Beispiel 32
2.3.11 Satz 33
2.4 Basis und Dimension 33
2.4.1 Definition: Basis 33
2.4.2 Beispiel 33
2.4.3 Beispiel: Standardbasis 33
2.4.4 Beispiel: Polynome 33
2.4.5 Lemma 33
2.4.6 Satz 34
2.4.7 Bemerkung: Koordinaten 34
2.4.8 Satz 34
2.4.9 Proposition 34
2.4.10 Lemma: Austauschsatz von Steinitz 34
2.4.11 Satz: Dimension 35
2.4.12 Bemerkung 35
2.4.13 Beispiel 35
2.4.14 Beispiel 35
2.4.15 Korollar 35
2.4.16 Korollar 36
2.5 Komplemente und direkte Summen 36
2.5.1 Definition: Direkte Summe 36
2.5.2 Beispiel 37
2.5.3 Beispiel 37
2.5.4 Satz 37
2.5.5 Satz 38
2.6 Anwendung: Matrizen und lineare Gleichungen 38
2.6.1 Definition: Rang einer Matrix 38
2.6.2 Bemerkung 38
2.6.3 Proposition 38

3 Lineare Abbildungen **40**
3.1 Grundlagen 40
3.1.1 Difiniton: Lineare Abbildung 40
3.1.2 Bemerkung 40
3.1.3 Beispiel 40
3.1.4 Beispiel: Affine Abbildungen 40
3.1.5 Beispiel: Die Abbildung T_A 40

3.1.6 Beispiele . . . 40
3.1.7 Beispiel: Vorwärts-Schift . . . 41
3.1.8 Definiton: Kern, Bild, Rang . . . 41
3.1.9 Proposition . . . 41
3.1.10 Satz . . . 41
3.1.11 Beispiel . . . 42
3.1.12 Satz: Dimensionssatz . . . 42
3.1.13 Korrolar . . . 42
3.1.14 Satz: Prinzip der linearen Fortsetzung . . . 43
3.1.15 Bemerkung . . . 44
3.2 Isomorphismen . . . 44
3.2.1 Definiton . . . 44
3.2.2 Bemerkung . . . 45
3.2.3 Beispiel: Transponierte . . . 45
3.2.4 Beispiel: Polynome . . . 45
3.2.5 Lemma . . . 45
3.2.6 Satz . . . 46
3.2.7 Bemerkung . . . 46
3.2.8 Proposition . . . 46
3.2.9 Satz . . . 46
3.2.10 Satz . . . 47
3.3 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . 47
3.3.1 Satz (darstellende Matrix) . . . 47
3.3.2 Bemerkung . . . 48
3.3.3 Beispiel: Polynome . . . 48
3.3.4 Proposition . . . 48
3.3.5 Korollar . . . 48
3.3.6 Satz . . . 48
3.3.7 Bemerkung . . . 49
3.3.8 Satz: Die Abbildung T_A . . . 49
3.3.9 Bemerkung . . . 49
3.3.10 Definition: Inverse Matrix . . . 49
3.3.11 Beispiel . . . 49
3.3.12 Korollar . . . 50
3.3.13 Definition: Regulär, Singulär . . . 50
3.3.14 Satz: Charakterisierung regulärer Matrizen . . . 50
3.3.15 Satz . . . 51
3.3.16 Satz: Basiswechsel . . . 51
3.3.17 Definition: Ähnlichkeit . . . 52
3.3.18 Bemerkung . . . 52

4 Eigenwerte **53**
4.1 Determinanten . . . 53
4.1.1 Definition: Signum . . . 53
4.1.2 Beispiel . . . 53
4.1.3 Proposition . . . 53
4.1.4 Bemerkung . . . 54
4.1.5 Definition: Determinante . . . 54
4.1.6 Bemerkung . . . 54
4.1.7 Beispiel . . . 54

4.1.8 Beispiel 54
4.1.9 Lemma 55
4.1.10 Satz: Multiplikativität von det 55
4.1.11 Satz 56
4.1.12 Korollar 56
4.1.13 Bemerkung 56
4.1.14 Propostition: Entwicklung von det 56
4.1.15 Beispiel 57
4.1.16 Beispiel: Dreiecksmatrizen 57
4.1.17 Proposition: Inverse und det 57
4.1.18 Beispiel 57
4.2 Eigentwerte und Eigenvektoren 57
4.2.1 Definition: Eigenwert, -vektor und -raum 58
4.2.2 Bemerkung 58
4.2.3 Beispiel 58
4.2.4 Beispiel: Shift-Oporator 59
4.2.5 Proposition 59
4.2.6 Korollar 60
4.3 Das charakteristische Polynom 60
4.3.1 Definition: charakteristisches Polynom 60
4.3.2 Bemerkung 60
4.3.3 Satz 61
4.3.4 Beispiel 61
4.3.5 Propostition 61
4.3.6 Beispiel 62
4.3.7 Satz 62
4.4 Diagonalisierung und Trigonalisierung 62
4.4.1 Definition: diagonalisierbar, trigonalisierbar 62
4.4.2 Bemerkung 62
4.4.3 Satz: Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit 63
4.4.4 Beispiel 64
4.4.5 Satz: Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit 65
4.4.6 Bemerkung: Jordan-Normalform 65
4.4.7 Beispiel 65
4.4.8 Korollar 66
4.4.9 Korollar 66
4.4.10 Satz: von Cayley-Hamilton 66
4.4.11 Bemerkung 66

5 Innere Produkte **67**
5.1 Skalarprodukte und Orthogonalität 67
5.1.1 Inneres Produkt 67
5.1.2 Bemerkung 67
5.1.3 Bemerkung: Orthogonalität 68
5.1.4 Beipsiel: Euklidischer Raum 68
5.1.5 Beispiel: Unitärer Raum 68
5.1.6 Beispiel 68
5.1.7 Definition: Orthogonales Komplement 68
5.1.8 Beispiel 69
5.1.9 Proposition 69

5.1.10 Satz 69
5.1.11 Definition: Orthogonal- und Orthonormalbasis 70
5.1.12 Beispiel 70
5.1.13 Proposition 70
5.1.14 Proposition 71
5.1.15 Satz 71
5.1.16 Beispiel: Legendre-Polynome 72
5.2 Adjungierte Abbildung 73
5.2.1 Satz: Riesz'scher Darstellungssatz 73
5.2.2 Definition: adjungierte Abbildung 74
5.2.3 Bemerkung 74
5.2.4 Beispiel: Transponierte 75
5.2.5 Beispiel: Hermite'sche 75
5.2.6 Satz 75
5.3 Selbstadjungierte Abbildung 75
5.3.1 Definition: Selbstadjungiert 76
5.3.2 Beispiel: Euklidischer Raum 76
5.3.3 Beispiel: Unitärer Raum 76
5.3.4 Beispiel 76
5.3.5 Satz 76
5.3.6 Bemerkung 77
5.3.7 Korollar 77

1 Grundlegendes

Mengen: A, B; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \times B$

Literatur

- Mathematik für Informatiker: Teschl, Hackenberger
- Lineare Algebra: Beutelspacker, Fischer

1.1 Relationen

1.1.1 Definiton: Relationen

Gegeben seien Mengen X und Y. Eine Teilmenge R des karthesischen Produktes

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\} \tag{1}$$

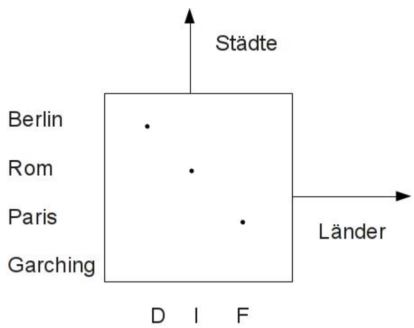
heißt **Relation**.

Im Fall $X = Y$ spricht man von einer Relation auf X.

Ferner: $R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$ heißt **Umkehrrelation**.

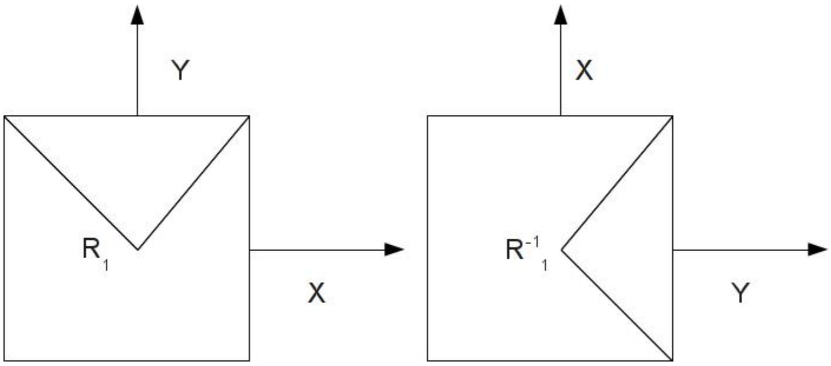
1.1.2 Beispiel

Die Menge $R_0 = \{(x, y) \in X \times Y : X \text{ ist Hauptstadt von } Y\}$ ist eine Relation zwischen der Menge X aller Länder und Y aller Städte.



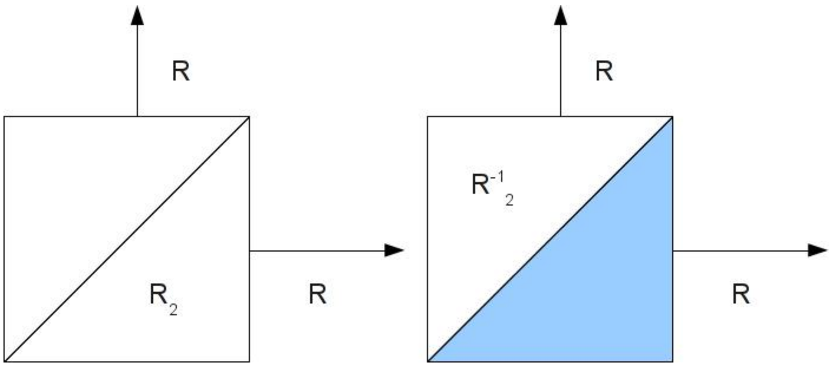
1.1.3 Beispiel

Mit der Menge $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$ ist $R_1 = \{(x, |x|) \in X \times Y : x \in X\}$ eine Ralation mit der Umkerrelation $R^{-1} = \{(|x|, x) \in Y \times X : x \in X\}$



1.1.4 Beispiel

Mit den Mengen $X = Y = \mathbb{R}$ ist $R_2 = \{(x, y) \in Y \times Y : x \leq y\}$ eine Ralation mit $R_2^{-1} = \{(y, x) : x \leq y\}$



1.1.5 Beispiel

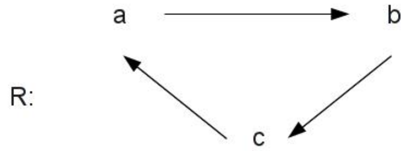
$R_3 = \{(x, y) \in C \times C : x$ und y haben gleichen Hersetller$\}$ ist eine Relation auf der Menge aller Computer C.

1.1.6 Bemerkung: Gerichtete Graphen

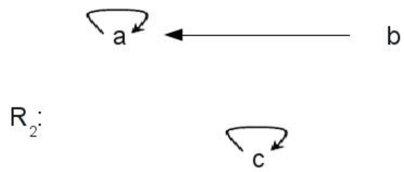
Relationen R auf endlicher Mange X können alternativ wie folgt dargestellt werden. Man repräsentiert die Elemente von X als Punkte in der Ebene (**Knoten**) und verbindet $x, y \in X$ genau dann durch einen Pfeil (**gerichtete Kante**), wenn $(x, y) \in R$ gilt.

Das Paar (X, R) heißt gerichteter Graph oder **Digraph**.

Beispiel: $X = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, b); (b, c); (c, a)\}$



$R_2 = \{(b, a), (a, a), (c, c)\}$



Eigenschaften von Relationen Eine Relation R auf X heißt

- Reflexiv $\Leftrightarrow (x, x) \in R : \forall x \in X$
- Transitiv $\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R : \forall x, y, z \in X$
- Symmetrisch $\Leftrightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R : \forall x, y \in X$

1.1.7 Beispiel

- Die Relation R_2 aus Beispiel 1.1.4 ($\leq$) ist reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.
- Die Relation R_3 aus Beispiel 1.1.5 (Computer selben Herstellers) ist reflexiv, transitiv, symmetrisch

1.1.8 Definition: Äquivalenzrelationen

Eine Relation A auf einer Menge X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Für ein Paar $(x, y) \in A$ schreiben wir $x \sim y$ und nennen x und y äquivalent.

1.1.9 Beispiel

1. Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $\{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ eine äquivalenzrelation (**Identitätsrelation**)
2. Ebenso ist das ganze Produkt $X \times Y$ eine Äquivalenzrelation (**Allrealation**)
3. Die Relation R_3 aus Beispiel 1.1.5 ist eine Äquivalenzrelation. Mit ihr lassen sich Computer nach Hersteller klassifizieren.

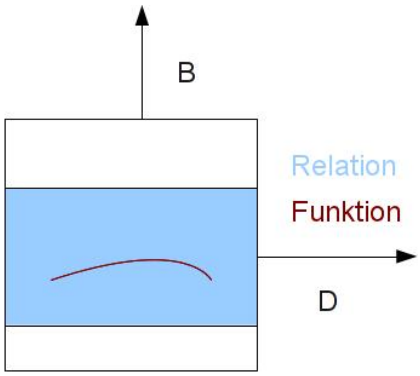
Für jedes $x \in X$ ist die Menge $[x] = \{y \in Xx \sim y\}$ die von x erzeugte **Äquivalenzklasse** und ein Element $y \in [x]$ heißt **Repräsentant** von $[x]$.

1.1.10 Beispiel

1. Für die Identitätsrelation ist $[x] = \{x\}$ für alle $x \in X$
2. Die Allrelation besitzt genau eine Äquivalenzklasse $[x] = X$
3. Im Beispiel 1.1.5 sind die Äquivalenzklassen die Menge aller Computerhersteller

1.2 Abbildungen

$$F \subseteq D \times B \tag{2}$$



1.2.1 Definition: Abblildung / Funktion

Eine Relaltion F zwischen zwei nichtleeren Mengen D und B heißt **Abbildung** oder Funktion von D nach B, falls für alle $x \in D$ gilt:

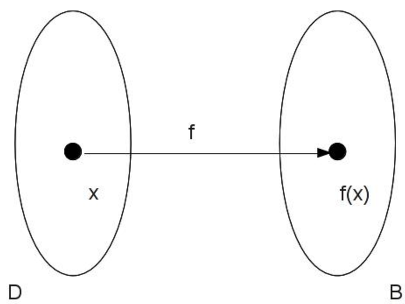
1. $\exists y \in B : (x, y) \in F$
2. Mit $y_1, y_2 \in B$ folgt aus $(x, y_1) \in F$ und $(x, y_2) \in F$, dass $y_1 = y_2$

Die Menge D heißt **Definitionsbereich** und B **Bildbereich** von F. Im Fall $D = B$ spricht man von einer **Abbildung auf** D oder einer **Selbestabbildung auf** D.

1.2.2 Bemerkung

Veranschaulicht man Funktionen auf (endlichen) Mengen D als gerichtete Graphen (Bemerkung 1.1.6), so geht von jedem Knoten genau eine Kante ab.

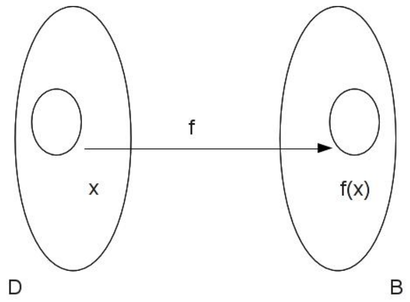
Anstelle der Notation $F \subseteq D \times B, (x, y) \in F$ schreibt man auch $f : D \to B$, $x \to f(x)$ oder $y := f(x)$



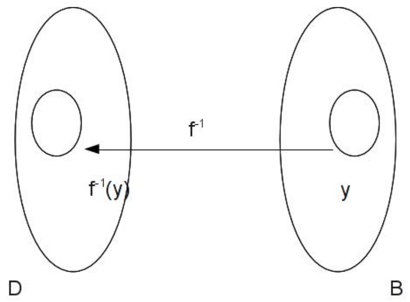
Mit einer weiteren nichtleeren Menge C und einer Abbildung $g : B \to C$ ist die **Verknüpfung (Komposition)** von g und f definiert als $g \circ f : D \to C$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Im Fall von Abbildungen f, g auf D gilt im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

Satt einzelner Punkte $x \in D$ kann man auch Mengen $X \subseteq D$ abbilden: $f(X) := y \in B : \exists x \in X : y = f(x)$



$f(X)$ heißt **Bild** von X unter f. Das **Urbild** einer Menge $Y \subseteq B$ ist definiert durch: $f^{-1}(Y) := x \in D : f(x) \in Y$.



Eine Abbildung $f : D \to B$ heißt:

- **injektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ höchstens ein Element.
- **surjektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ mindenstens ein Element.
- **bijektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ genau ein Element.

Eine Abbildung $f : D \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.2.3 Beispiel: Identische Abbildung

Die **identische Abbildung** auf einer Menge $D \neq \emptyset$ ist $id_D : D \to D, id_D(x) := x$. Sie ist bijektiv.

1.2.4 Beispiel

Die Relation R_0 aus Beispiel 1.1.2 zwischen $X = \{\text{Land}\}$ und $Y = \{\text{Stadt}\}$ ist eine Funktion $r_0 : X \to Y : r_0(\text{Land}) :=$Hauptstadt von Land. Ihr Bild ist $r_0(X) = \{\text{Hauptstädte}\}$ und die Urbilder lauten:

$$r_0^{-1}(\{S\}) = \begin{cases} \emptyset \text{ falls s keine Hauptstadt} \\ \{l\} \text{ falls s Hauptstadt von l} \end{cases} \tag{3}$$

Folglich ist r_0 injektiv, aber nicht surjektiv. Betrachtet man die Menge aller Hauptstädte von r_0, so ist diese Abbildung auch surjektiv.

1.2.5 Beispiel

Die Relation R_1 zwischen $\mathbb{R}$ und $[0, \infty)$ aus Beispiel 1.1.3 ist eine Abbildung und lässt sich schreiben als $r_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty), r_1(x) := |x|$

Für sie gilt $r_1(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ und $r^{-1}(\{y\}) = \{-y, y\}$ für alle $y \in [0, \infty)$

Also ist $r_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ surjektiv, aber nicht injektiv.

Betrachten wir r_1 mit ganz $\mathbb{R}$ als Bildbereich, so gilt: $r_1^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ für $y < 0$ und dann ist r_1 nicht mehr surjektiv.

1.2.6 Beispiel: ASCII-Code

Der ASCII-Code zur Codierung alpha-numerischer Zeichen ist gegeben durch eine bijektive Abbildung $f : \{0, 1, ..., 127\} \to \{\text{ASCII darstellbare Zeichen}\}$

1.2.7 Definition: Umkehrabbildung

Einfache Beispiele (etwa Beispiel 1.2.5 zeigen, dass die Umkehrrelation F^{-1} einer Abbildung $F \subseteq D \times B$ bzw. $f : D \to B$ nicht unbeding eine Abbildung ist.

Eine Abbiludng $f : D \to B$ heißt **umkehrbar**, falss ihre Umkehrrealation F^{-1} wieder eine Abbildung ist. Für letztere schreibt man $f^{-1} : B \to D$ und nennt sie **Umkehrabbildung** von f.

1.2.8 Beispiel

Mit einer umkehrbaren Abbildung $f : D \to B$ ist auch ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$ umkehrbar mit

$$f^{-1} \circ f = id_D \tag{4}$$

$$f \circ f^{-1} = id_B \tag{5}$$

1.2.9 Korrolar

Eine Abbildung $f : D \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn f bijektiv ist.

Für injektives f existiert die Umkehrfunktion nur auf $f(D)$.

1.3 Matrizen

Wir führen kurz die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein. Darunter versteht man alle Paare $z = (x, y)$ reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit der **Addition**

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{6}$$

und der **Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{7}$$

wobei $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$.

Differenz und Quotient ergeben sich zu

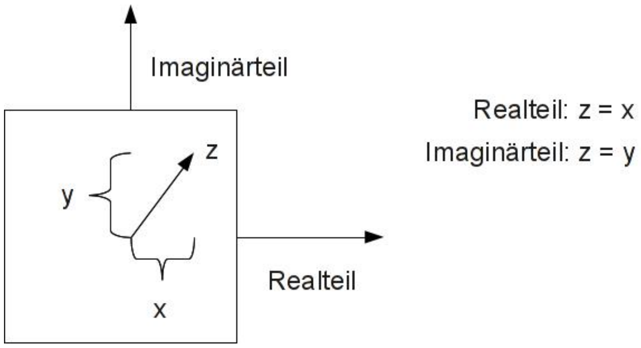
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tag{8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}) \tag{9}$$

Alternative Darstellung:

$$z = (x, y) = x + iy \tag{10}$$

mit **Realteil** x, **Imaginärteil** y und der Konvention $i^2 = -1$



1.3.1 Definiton: Matrix

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für eine der drei Mengen $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) oder $\mathbb{C}$.

Eine $m \times n$-Matrik ist ein rechteckiges Schema von Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ der Form:

$$A = (i, j)_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Der erste Index $i \in \{1, ..., m\}$ nummeriert die m **Zeilen**, der zweite Index $j \in \{1, ..., n\}$ die **Spalten** der Matrix A. Das **Element** $a_{ij} \in \mathbb{K}$ steht daher in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Für die Menge aller solchen Matrizen schreiben wir $\mathbb{K}^{m \times n}$. Für eine **quatdtatische Matrix** A gilt $m = n$ und die a_{ij} heißen **Diagonalelemente**.

Warum arbeiten wir mit Matrizen? Drehungen, Spiegelungen lassen sich gut durch Matrizen beschreiben. Google Pagerank lässt sich durch eine Matrix beschreiben.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{K} \tag{12}$$

1.3.2 Beispiel n-Tupeln, m-Spalten

Ein **n-Tupel** $x = (x_1, ..., x_n)$ von Zahlen x_i aus K wird als $1 \times n$-Matrix interpretiert. Eine **m-Spalte**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

wird als $m \times 1$-Matrix verstanden. wir identifizieren $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{m \times 1}$

1.3.3 Beispiel: Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrix

Wir definieren das **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \tag{14}$$

und $I_n := (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ist die **Einheitsmatrix**.

Bemerkung des Verfassers: Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Matrixmultiplikation.

Bei der Nullmatrix $0 = (0)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ sind alle Elemente gleich $0 \in \mathbb{K}$.

1.3.4 Beispiel: Diagonal- und Dreiecksmatrizen

Mann naennt eine quaratische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ **diagonal**, falls $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Wir schreiben dann:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = diag(a_{11}, ..., a_{nm}) \tag{15}$$

Eine **obere Dreiecksmatrix** ist quadratisch und erfüllt $a_{ij} = 0$ für $i > j$, wogegen eine **untere Dreiecksmatrix** $a_{ij} = 0$ für $i < j$ erfüllt. Sie sind von der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{16}$$

bzw.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Mathematische Operationen für Matrizen:

- **skalare Multiplikation**: $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n}, \alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Wir schreiben $-A := (-1) \cdot A$
- **Addition** $+ : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times n}, A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Die Substrakiton lautet $A - B = A + (-B)$
- Genau für $m \times n$ Matrizen A und $n \times p$ Matrizen B lässt sich eine **Multiplikation** erklären: $\mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{n \times p} \longrightarrow \mathbb{K}^{m \times p}$, $A \cdot B = AB := (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$ das Produkt ist also eine $m \times p$ Matrix

Merke: Das Produkt macht nur Sinn, falls die Spaltenzahl der ersten mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.

1.3.5 Bemerkung

1. Um Produkte von Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ zu berechnen eigenet sich das Schema:

	B
A	C

$$C = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \tag{18}$$

2. Speziealfall: A in $\mathbb{K}^{m\times n}, x \in \mathbb{K}^n$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ a_{nk}x_k \end{pmatrix} \tag{19}$$

1.3.6 Beispiel

Das Produkt von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ lautet:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 4 & 5 \\ & & 6 & 7 \\ \hline 0 & 1 & 0\cdot 4 + 1\cdot 6 & 0\cdot 5 + 1\cdot 7 \\ 2 & 3 & 2\cdot 4 + 3\cdot 6 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 \end{array} \tag{20}$$

also $C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$

In umgekehrter Reihenfolge gilt: $BA = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$. Daher ist das Produkt von Matrizen nicht kommutativ. Im Allgemeinen gilt: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.3.7 Beispiel

1. Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $I_m A = A = AI_n$
2. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $AB = 0$, womit das Produkt von Matrizen nicht **nullteilerfrei** ist, das heißt: $AB = 0$ kann gelten, ohne, dass ein Faktor $A = 0$ oder $B = 0$ ist.
3. Das Produkt von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert; Das Produkt $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 34 & 47 \\ 27 & 44 & 61 \end{pmatrix}$ dagegen schon.

1.3.8 Beispiel: RGB-Raum

Im RGB-Farbmodell werden Farben durch Tripel (r, g, b) reellere Zahlen $r, g, b \in \mathbb{R}$ beschrieben: $(255, 0, 0)$ = rot, $(0, 0, 255)$ = blau, $(255, 255, 0)$ = gelb.

Alternativ: YIQ-Modell (y, i, q).

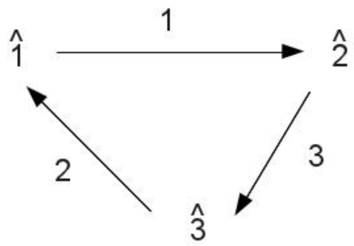
Die Umrechnung geschieht durch eine Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,6 & -0,3 & -0,3 \\ 0,2 & -0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \tag{21}$$

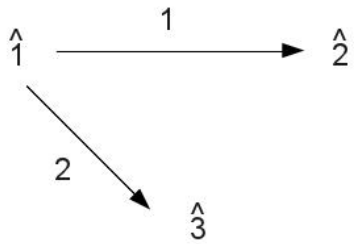
1.3.9 Beispiel: Inzidenzmatrix

Gerichtete Graphen ohne Schleifen (siehe Beispiel 1.1.6) mit den Knoten $\{\hat{1}, ..., \hat{m}\}$ und den Kanten $\{1, ..., n\}$ lassen sich durch eine **Inzidenzmatrix** $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschreiben mit:

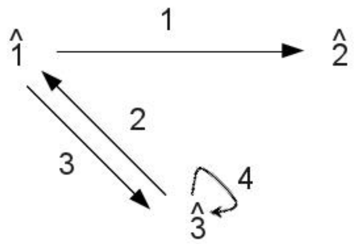
$$a_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ von Knoten } \hat{i} \text{ geht die Kante } j \text{ aus} \\ -1, \text{ in Knoten } \hat{i} \text{ mündet die Kante } j \text{ aus} \\ 0, \text{ Knoten } \hat{i} \text{ und Kante } j \text{ berühren sich nicht} \end{cases} \tag{22}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Nicht Schleifenfrei!

1.3.10 Satz: Rechenregeln für Matrizen

Für Zahlen $\alpha \in \mathbb{K}$ und Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ gelten das Distributivgesetz $A(B + C) = AB + AC$ für alle $C \in \mathbb{K}^{n \times p}$ und die Assoziativ-Gesetze $(\alpha A)B = A(\alpha B), A(BC) = (AB)C$ für alle $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$

1.4 Lineare Gleichungen

1.4.1 Definition: Lineare Gleichungen

Es seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}$. Dann bezeichnet

$$(L_b) : A_x = b \tag{23}$$

als **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ oder kurz als lineare Gleichung $m\mathbb{K}^n$.

A heißt **Koeffizientenmatrix** und b **Inhomogenität** von (L_b).

Im Fall $b \neq 0$ nennt man (L_b) **inhomogen** und erhält andernfalls die **homogene Gleichung**

$$(L_0) = A_x = 0 \tag{24}$$

Eine Lösung von (L_b) ist ein Element $x \in \mathbf{K}^n$ mit $Ax = b$ und

$$L_b := x \in \mathbb{K}^n : Ax = b \tag{25}$$

steht für die **Lösungsmenge** von (L_b).

1.4.2 Bemerkung

1. Ausgeschrieben lautet (L_b):

$$(1.4a) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 & +... + a_{1n}x_n & = b1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 & +... + a_{2n}x_n & = b2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 & +... + a_{mn}x_n & = b3 \end{cases} \tag{26}$$

   oder noch unübersichtlicher

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{27}$$

   für $1 \leq i \leq m$

2. (L_0) hat stets die **triviale Lösung** $0 \in \mathbb{K}^n$

   Inhomogene Gleichungen müssen nicht unbedingt lösbar sein: $0x = 1$

1.4.3 Satz: Superpositionsprinzip

Es seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ Lösungen von (L_0). Dann ist auch $\alpha x + \beta y$ eine Lösung von (L_0), d.h. $\alpha x + \beta y \in L_0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1.4.4 Satz

Ist $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von (L_b), so gilt: $L_b = \hat{x} + L_0$

Hierbei: Für gegebene $x \in \mathbb{K}^n, A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist $x + A := \{y \in \mathbb{K}^n$: es gibt ein $a \in A$ mit $y = x + a\}$

Beweis: Hausaufgabe

Nun: Explizite Lösung von (L_b)!

Besonders einfach, falls $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal ist. Gilt nämlich $a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$, so besitzt (L_b) die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ mit Elementen

$$x_1 = \frac{b_i}{a_{ii}} \text{ für } 1 \leq i \leq n; \tag{28}$$

ist dagegen $a_{ii} = 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, so besitzt (L_b) undenlich viele Lösungen für $b_i = 0$ und andernfalls keine Lösung.

Allgemeinere Klasse: ein $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist in **Zeilen-Stufen-form (ZSF)**, falls in jeder Zeile gilt:

i Beginnt sie mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lediglich weitere Nullen

ii Unter dem ersten Element $\neq 0$ stehen nur Nullen

Bei **strenger ZSF** muss zusätlich gelten:

iii Über dem ersten Element $\neq 0$ stehen nur Nullen

1.4.5 Beispiel

1. Obere Dreiecksmatrizen sind in ZSF, Diagonalmatrizen sogar in strengenr ZSF
2. Bezeichnet $*$ ein Element $\neq 0$, so gilt: $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ sind nicht in ZSF.

$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ ist in ZSF, aber nicht streng.

$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in strenger ZSF.

1.4.6 Beispiel: Rückwärts-Substitution

Die inhomogene lineare Gleichung

$$(1.4b) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \tag{29}$$

hat die KoeffizIententmatrix bzw. Inhomogenität

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Rückwärtssubstitution: Aus der letzten Gleichung $x_3 + 2x_4 = 1$ sieht mann, dass $x_4 = t$ frei gewählt werden kann, $t \in \mathbb{K}$. Dies liefert $x_3 = 1 - 2t$. Die bekannten Variablen x_3, x_4 können in die zweite Gleichung von $(1.4b)$ eingesetzt werden, also $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = t - 1$ und analog liefert die erste Gleichung $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0$. Die Lösungsmenge von $(1.4b)$ ist also

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 : t \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Die Lösungsmenge L_b von (L_b) ändert sich nicht, wenn folgende Operationen auf $(1.4a)$ angewadt werden:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Vertauschen von Gleichungen} \\ \bullet \text{ Multiplikation von Gleichungen mit } \alpha \in \backslash\{0\} \\ \bullet \text{ Addition des } \alpha\text{-fachen der } k\text{-ten Gleichung zur } j\text{-ten} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{ elementare} \\ \text{Zeilentransformation} \end{array}$$

ZIEL: Transformiere A bzw. (L_b) auf ZSF vermöge elementarer Zeilentransformationen. Systematisch: Gauß Algoritmhus

Zu seiner Beschreibung gehen wir davon aus, dass die erste Spalte von A von 0 verschieden ist (andernfalls sind x_i,..., x_n umzunummerieren): Ohne Sonderfälle gilt:

1. Ordne die Gleichungen in $(1.4a)$ so an, dass $a_n \neq 0$. In der gängigsten Notation schreibt man $(1.4a)$ als:

$$\left.\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array} \tag{32}$$

2. Substraiere von der i-ten Gleichung, $2 \leq i \leq m$ in $(1.4a)$ das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Gleichung

$$(1.4c) = \left.\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{array}\right| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ A^{(1)}x^{(1)} = b^{(1)} \end{array} \right. \tag{33}$$

3. Transformiere $A^{(1)}x^{(1)} = b^{(1)}$ entsprechend und fahre sukzessive fort, bis (idealerweise) eine Dreiecks- oder ZSF entstanden ist.

4. Löse das resultierende System durch Rückwärtssubstitution.

1.4.7 Beispiel

Als kurschreibweise für

$$(1.4d) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 & +3x_3 = 0 \\ 4x_4 + 5x_5 & +6x_6 = 0 \\ 7x_7 + 8x_8 & +9x_9 = 0 \end{cases} \tag{34}$$

verwenden wir

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 0 & \\ 4 & 5 & 6 & 0 & |II-4I \\ 7 & 8 & 9 & 0 & |III-7I \end{array} \tag{35}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 0 & \\ 0 & -3 & -6 & 0 & |\cdot(-\frac{1}{3}) \\ 0 & -6 & -12 & 0 & |III-2II \end{array} \tag{36}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{37}$$

Damit ist $(1.4d)$ äquivalent zu $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Rückwärts-Substitution: Wähle $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{K}$ und es folgt $x_2 = -2x_3 = -2t$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 = t$. Die Lösungsemenge von $(1.4d)$ ergibt sich zu:

$$L_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : t \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

1.4.8 Satz

Hat (L_0) weniger Gleichungen als Unbekante, d.h. $m < n$, so besitzt sie undendlich viele Lösungen.

Beweis:

I Man zeigt (*) (L_0) hat eine nichttriviale Lösung

II Da (L_0) nach Schritt (I) eine Lösung $x \neq 0$ besitzt, ist nach dem Superpositionsprinzip aus Satz 1.4.3 auch jedes $t \cdot x, t \in \mathbb{K}$, eine Lösung. $\square$

1.4.9 Satz

Besitzt (L_b) genau so viele Gleichungen wie Unbekannte, d.h. $m = n$, so gilt:

a) Ist $L_0 = \{0\}$, so besitzt (L_b) genau eine Lösung

b) Besitzt (L_0) eine nichttriviale Lösung, so existieren entweder keine oder aber undenlich viele verschiedene Lösungen von (L_b)

Beweis

a) Wir gehen mittels vollständiger Induktion vor: Für $n = 1$ gilt die Behauptung offenbar. Im Induktionsschritt gelte (a) für $n - 1$. Da (L_0) nur die triviale Lösung hat, gilt $A \neq 0$ Durch Umnummerieren erreichen wir $a_{11} \neq 0$. Dann wird zur i-ten Gleichung, $2 \leq i$, in $(1.4a)$ das $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Gleichung addiert:

$$(1.4f) = \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_n \\ \qquad A^* \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b^* \end{cases} \tag{39}$$

mit $A^* \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}, b^* \in \mathbb{K}^{n-1}$

Die homogege Gleichung $A^*x^* = 0$ hat nur die triviale Lösung, denn sonst hätte (L_0) eine nichttriviale Lösung.

Das Teilsystem $A^*x^* = b^*$ besitzt nach Induktionsannahme genau eine Lösung x^* mit Elementen $x_2, ..., x_n$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung in $(1.4f)$ folgt ein eindeutiger Wert x_1 und damit ist die Lösung von (L_b) in eindeutiger Weise.

b) Es sei $\hat{x}$ eine Lösung von (L_b) und x eine nichttriviale Lösung von (L_0). Dann liefern Die Sätze 1.4.3 und 1.4.4 dass $\hat{x} + \alpha x$ die Gleichung löst für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$. In diesem Fal hat (L_b) undendlich viele Lösungen. Die einzige verbleibende Möglichkeit ist, dass (L_b) keine Lösung hat.

$\square$

2 Lineare Räume

2.1 Algebraische Strukturen

Bezeichnet $M \neq \emptyset$ eine Menge und $F(M)$ die Menge aller Selbstabbildungen auf M, so kann die Komposition $\circ$ als Abbildung $\circ : F(M) \times F(M) \to F(M)$ interpretiert werden – man spricht von einer **Verknüpfung**.

2.1.1 Definition: Gruppe

Eine **Gruppe** $(\mathbb{G}, *)$ ist eine nichtleere Menge $\mathbb{G}$ mit einer Verknüpfung $* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ mit den Eigenschaften

- (G_1): $*$ ist **assoziativ**: d.h. $a * (b * c) = (a * b) * c$ für $a, b, c \in \mathbb{G}$
- (G_2): es existiert ein **neutrales Element** $e \in \mathbb{G}$ mit $a * e = a = e * a$ für $a \in \mathbb{G}$
- (G_3): zu jedem $a \in \mathbb{G}$ existiert ein **inverses Element** $a^{-1} \in \mathbb{G}$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ für $a \in \mathbb{G}$

Bei einer **kommutativen** oder **Abel'schen Gruppe** gilt ferner:

- (G_4): $a * b = b * a$ für alle $a, b \in \mathbb{G}$

Für eine **Halbgruppe** müssen nur (G_1) und (G_2) gelten.

2.1.2 Bemerkung

1. Das neutrale Element $e \in \mathbb{G}$ ist eindeutig: In der Tat bezeichnen $e_1, e_2 \in \mathbb{G}$ zwei neutrale Elemente, so folgt nach (G_2): $e_2 = e_1 * e_2$ und $e_1 * e_2 = e_1$, also $e_1 = e_2$.
2. Zu gegebenem $a \in \mathbb{G}$ ist auch das inverse Element $a^{-1} \in \mathbb{G}$ eindeutig. Für inverse Elemente a_1^{-1}, a_2^{-1} von a gilt nämlich
$$a_1^{-1} \overset{(G_2)}{=} a_1^{-1} * e \overset{(G_3)}{=} a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) \overset{(G_1)}{=} (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} \overset{(G_3)}{=} e * a_2^{-1} \overset{(G_2)}{=} a_2^{-1} \tag{40}$$
3. Entsprechend $e = e^{-1}, a = (a^{-1})^{-1}$

2.1.3 Bemerkung: Potenzen

Die Potenzen $a^n \in \mathbb{G}$ eines $a \in \mathbb{G}$ ($\mathbb{G}$ multiplikative Halbgruppe) sind rekursiv erklärt durch
$$a^0 := e, a^{n+1} = a * a^n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{41}$$
in einer Gruppe setzen wir $a^n := (a^{-n})^{-1}$ für $n < 0$

2.1.4 Beispiel

1. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und dem zu $a \in \mathbb{Z}$ inversen Element $-a$. Dagegen ist $(\mathbb{Z}, \cdot)$ keine Gruppe, denn das multiplikative Inverse lässt sich innerhalb von $\mathbb{Z}$ nicht erkären. Ebenso ist $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe.

2. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist $(\mathbb{K}, +)$ eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und $-a$ als zu a Inversen. Auch $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative multiplikative Gruppe mit neutralem Element 1 und dem zu a inversen Element $\frac{1}{a}$.

3. Mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bilden die Matrizen $(\mathbb{K}^{m\times m}, +)$ eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und dem Inversen $-A$ zu A. Die quadratischen reellen, rationalen oder komplexen Matrizen $(\mathbb{K}^{n\times n}\backslash\{0\}, \cdot)$ bilden keine Gruppe, da etwa $diag(1, 0) \neq 0$ kein Inverses besitzt.

2.1.5 Beispiel

Denken Sie sich eines aus!

2.1.6 Beispiel: Modulo

Es sei $p \leq 2$ eine ganze Zahl und $\mathbb{Z}_p := \{0, ..., p-1\}$. Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt es vermöge der Division mit Rest eindeutige $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}_p$ mit $a+b = mp+k$; Wir schreiben dann

$$k = a + b \bmod p \quad \text{oder} \quad k =: a +_p b \tag{42}$$

Dann ist $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 0.

2.1.7 Beispiel: Symmetrische Gruppe

Es sei M eine nichtleere Menge und $S(M)$ bezeichnet alle bijektiven Selbstabbildungen $f : M \to M$. Dann ist die **symmetrische Gruppe** $(S(M), \circ)$ eine im Allgemeinen nicht kommutative Gruppe mit id_M als neutralem Element und $f^{-1} : M \to M$ als inversem Element zu f. Im Fall $M = \{1, ..., n\}$ schreiben wir $S_n := S(\{1, ..., n\})$. Die Menge aller nicht-notwendig bijektiven Selbstabbildungen $F(M)$ ist dagegen eine Halbgruppe bezüglich $\circ$.

2.1.8 Korrolar: Rechnen in Gruppen

Für alle $a, b, c \in \mathbb{G}$ gilt

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \tag{43}$$

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \tag{44}$$

$$a * b = e \Rightarrow a = b^{-1} \tag{45}$$

Beweis
Es seien $a, b, c \in \mathbb{G}$. Wir zeigen zunächst, dass $b^{-1} * a^{-1}$ das inverse Element von $a * b$ ist. Dazu

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) \overset{(G_1)}{=} b^{-1} * (a^{-1} * (a * b)) \overset{(G_1)}{=} \tag{46}$$

$$b^{-1} * ((a^{-1} * a) * b) \overset{(G_3)}{=} b^{-1} * (e * b) \overset{(G_2)}{=} \tag{47}$$

$$b^{-1} * b \overset{(G_3)}{=} e \tag{48}$$

und entpsrechend $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$.

Die erste Implikation ergibt sich nach Voraussetzung durch

$$b \overset{(G_2)}{=} e * b \overset{(G_3)}{=} (a^{-1} * a) * b \overset{(G_1)}{=} \tag{49}$$

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \overset{(G_1)}{=} (a^{-1} * a) * c \overset{(G_3)}{=} \tag{50}$$

$$e * c \overset{(G_2)}{=} c \tag{51}$$

Die verbleibende Implikation sei dem Leser überlassen. □

2.1.9 Definition: Körper

Ein **Körper** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit mindestens zwei Elementen versenen, mit den **arithmetischen Operationen** $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (**Addition**) und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (Multiplikation).

- (K_1): $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und dem zu $\alpha \in \mathbb{K}$ inversen Element $-\alpha$, d.h. für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(K_1^1) : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \tag{52}$$

$$(K_1^2) : \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \tag{53}$$

$$(K_1^3) : \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0 \tag{54}$$

$$(K_1^4) : \alpha + \beta = \beta + \alpha \tag{55}$$

- (K_2): $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1 und zu $\alpha \in \mathbb{K}$ Inversem $\frac{1}{\alpha}$, das heißt es gilt für $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$

$$(K_2^1) : \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \tag{56}$$

$$(K_2^2) : \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha \tag{57}$$

$$(K_2^3) : \alpha \cdot (-\alpha) = (-\alpha) \cdot \alpha = 1 \tag{58}$$

$$(K_2^4) : \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \tag{59}$$

- (K_3): Es gelten die Distributivgesetze $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, für alle $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{K}$

Üblich $\alpha\beta := \alpha \cdot \beta$
Subtraktion als $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$
Division als $\frac{\alpha}{\beta} := \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

2.1.10 Beispiel

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper bezüglich $+, \cdot$.

2.1.11 Beispiel: Restklassenkörper modulo p

Mit einer gegebenen Primzahl $p \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen $\mathbb{Z}_p := \{0, ..., p-1\}$. Dann gibt es für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ eindeutige Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ und $k, l \in \mathbb{Z}_p$ derart, dass

$$\alpha + \beta = mp + n \tag{60}$$

$$\alpha \cdot \beta = np + l \qquad \text{Division mit Rest} \tag{61}$$

(2.1a) Addition: $\alpha +_p \beta := k$
Mulitiplikation: $\alpha \cdot_p \beta := l$
$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist Körper, der sogenannte Restklassenkörper modulo p.

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c|cc} +_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{XOR} \tag{62}$$

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c|cc} \cdot_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{AND} \tag{63}$$

$$\mathbb{Z}_3 : \begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \tag{64}$$

$$\mathbb{Z}_3 : \begin{array}{c|ccc} \cdot_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \tag{65}$$

2.1.12 Korolar

Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper, so gilt für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, dass

$$(2.1b) \qquad 0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0, \beta \cdot (-\alpha) = (-\beta) \cdot \alpha \tag{66}$$

$$(2.1c) \qquad (-1) \times \alpha = -\alpha, (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta \tag{67}$$

und ferner die Implikation

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0 \tag{68}$$

Körper sind nullteilerfrei.

2.1.13 Bemerkung

es gilt $1 \neq 0$, da die Annahme $1 = 0$ folgenden Widerspruch imzliziert: Da $\mathbb{K}$ mindestens 2 Elemente enthält gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ mit

$$\alpha \overset{K_2^2}{=} \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 0 = \overset{(2.1b)}{=} 0 \tag{69}$$

Daher ist der Restklassenkörper modulo 2 $\mathbb{Z}_2$ der kleinste Körper.

Beweis Wähle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Es gilt:

$$0 \cdot \alpha \overset{(K_1^2)}{(} 0 + 0) \cdot \alpha \overset{(K_3)}{0} \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha \tag{70}$$

mittels Korrolar 2.1.8 ($+, a = b = 0$ und $c = 0$, folgt aus $a \cdot 0 = 0$, Kommutativität liefert $\alpha \cdot 0 = 0$. Aus dieser Behauptung resultiert

$$(-\beta) \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha \overset{K_3}{=} (-\beta + \beta) \cdot \alpha \overset{K_2^2}{=} 0 \cdot \alpha = 0 \tag{71}$$

Mit Korrolar 1.2.8 ($+, \alpha = (-\beta) \cdot \alpha, \beta = \beta \cdot \alpha$) Dies liefert $-(\beta \cdot \alpha) = (-\beta) \cdot \alpha$ und $\beta \cdot (-\alpha) = -(\beta \cdot \alpha)$. Die Beziehung $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$ reslutiert aus dem eben gezeigten $\beta = 1$ und $(-1) \cdot \alpha = 1 \cdot (-\alpha) \overset{K_2^2}{=} -\alpha$,

2.1c ergibt sich mit Bemerkung 2.1.2(3) aus $(-\alpha) \cdot (-\beta) \overset{(2.1b)}{=} -(\alpha(-\beta)) \overset{(2.1b)}{=} -(-(\alpha \cdot \beta)) = \alpha \cdot \beta$

$\alpha \cdot \beta = 0$

Annahme: $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$, dann $1 \overset{(K_2^3)}{=} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta \overset{(2.1b)}{=} 0$

2.2 Vektorräume

2.2.1 Linearer Raum, Vektorraum

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Vektorraum oder Linearer Raum $(X, +, \cdot)$ (über $\mathbb{K}$) ist eine nichtleere Menge X mit arithmetischen Operationen

a) Addition $+ \colon X \times X \to X$ derart, dass $(X, +)$ eine Kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 oder Nullvektor ist.

b) Skalare Multiplikation $\cdot \colon X \times X \to \mathbb{K}$ derart, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt:

$$V_1 : \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y \qquad \text{Distributivgesetz} \tag{72}$$

$$V_2 : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x \qquad \text{Distributivgesetz} \tag{73}$$

$$V_3 : (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \qquad \text{Assoziativgesetz} \tag{74}$$

$$V_4 : 1 \cdot x = x \tag{75}$$

Die Elemente aus K heißen Skalare und X heißen Vektoren.

$\alpha x := \alpha \cdot x$, $x - y := x + (-y)$

2.2.2 Beispiel

Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper

(0) Der triviale Raum $\{0\}$ der nur die 0 enthält

(1) Weiter ist $\mathbb{K}$ ein Vektorraum über sich selbst.

(2) Die Menge aller $m \times n$-Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ bezüglich Addition und Multiplikation aus Beispiel 1.3.4.

Ein n-Tupel $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ bezeichnen wir als Zeilenvektor und eine m-Spalte (siehe Beispiel 1.3.2) als Spaltenvektor.

2.2.3 Beispiel

Es sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die n-Spalten $\mathbb{Z}_p^n$ in $\mathbb{Z}_p$ mit der komponentenweisen Addition $+_p$ und der skalaren Multiplikation $\cdot_p$ ein linearer Raum über $\mathbb{Z}_p$

Insbesondere für $\mathbb{Z}_2^n$

$$\begin{array}{c|cccc}
+_2 & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}
\end{array} \tag{76}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\cdot_2 & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\
\hline
0 & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\
1 & \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
\end{array} \tag{77}$$

2.2.4 Lösungsmenge Lg

Mit Satz 1.4.3 ist L_0 einer homogenen Gleichung ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Die Lösungsmenge L_b inhomogener Gleichungssystem ist kein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

2.2.5 Beispiel: Funktonenräume

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und X ein Linearer Raum über $\mathbb{K}$. Dann ist $F(\Omega, X) := \{u := \Omega \to X\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit punktweise definierten arithmetischen Operationen

$$(u + v)(t) := u(t) + v(t) \tag{78}$$

$$(\alpha \cdot u)(t) := \alpha u(t) \tag{79}$$

für alle $t \in \Omega, \alpha \in \mathbb{K}$;

Die Menge $F(\Omega, X)$ *(Funktionen mit gleicher Definitionsmenge)* wird als Funktionenraum bezeichnet. Falls $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ oder $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, dann bezeichen wir $F(\Omega, X)$ als Folgenraum.

2.2.6 Korolar

Ist $(X, +, \cdot)$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$, so gilt für alle Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und Vektoren $x, y \in X$:

a) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = \alpha \cdot 0_X = 0_X$

b) Falls $\alpha \cdot x = 0$, so folgt $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$ oder $x = 0 \in X$

c) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$

d) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ und $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha x - \beta x$

Beweis Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$

a) Es gilt: $0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$ wegen V_2. Nach Definition a existiert zum Vektor $z := 0_{\mathbb{K}} \cdot x$ ein Vektor $-z$ mit $0_{\mathbb{K}} \cdot x + (-z) = 0_X$ und wir erhalten $0_X = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + (-z) = (0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (-z) = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + (0_{\mathbb{K}} \cdot x + (-z)) = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_X = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$ und die Beziehung $\alpha \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_X$ folgt analog.

b) Es gelte $\alpha x = 0$ mit $\alpha \neq 0$ und wir zeigen $x = 0_X$. $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{\alpha}$. Nach (a) folgt $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} 0_X = 0_X$ und andererseits $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = (\frac{1}{\alpha}\alpha)x = 1x = 1$.

2.2.7 Definition Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge $Y \subseteq X$ eines linearen Raumes $(X, +, \cdot)$ über $\mathbb{K}$ heißt Unterraum von X, falls gilt

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}; y_1, y_2 \in Y \tag{80}$$

2.2.8 Bemerkung

Jeder lineare Raum X hat die trivialen Unterräume $\{0\}$ und X.

2.2.9 Beispiel: Stetige und stetig-differenzierbare Funtionen

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Menge der stetigen Funktionen $C(I, \mathbb{R}^n)$, auf I mit Bildern in $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $F(I, \mathbb{R}^n)$. Ebenso sind die stetig-differenzierbaren Funktionen $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ein Unterraum von $C(I, \mathbb{R}^n)$ und $F(I, \mathbb{R}^n)$

2.2.10 Beispiel

Mit gegebenem Körper $\mathbb{K}$ definieren wir den Raum der Polynome (über $\mathbb{K}$) durch $P(\mathbb{K}) := \{p \in F(\mathbb{K}, \mathbb{K}) | \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{K} : p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\}$.

Seine Elemente heißen Polynome und die a_k deren Koeffizienten.

Dann ist $P(\mathbb{K})$ ein Unterraum von $F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Der Grad deg p eines Polynoms $p \in P(\mathbb{K})$ ist der maximale Index $k \in \mathbb{N}_0$ für den $a_k \neq 0$ ist.

Für $m \in N_0$ sind die Mengen

$$P_m(\mathbb{K}) := \{p \in P(\mathbb{K}) : deg(p) \leq m\} \tag{81}$$

Unterräume von $P(\mathbb{K})$, wogegen

$$\{p \in P(\mathbb{K}) : deg(p) = m\} \tag{82}$$

für $m \neq 0$ kein Unterraum ist.

Ferner ist jedes $P_n(\mathbb{K})$ Unterraum vom $P_m(\mathbb{K})$ für $0 \leq n \leq m$.

2.2.11 Satz: Schnitte und Summen von Unterräumen

Ist I eine nichtleere Indexmenge $\{Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen von X, so gilt:

a) Der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$ ist ein Unterraum von X

b) Für endliches I ist die Summe $\sum_{i\in I} Y_i := \{\sum_{i\in I} y_i \in X : y_i \in Y_i; i \in I\}$ der kleinste Unterraum von X, der jedes Y_i enthält.

Für $I = \{1, ..., n\}$ schreibt man auch $Y_1 + ... + Y_n = \sum_{i\in I} Y_i$.

Beweis:

(a): Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I}$. Dann gilt $x, y \in Y_i$ für alle $i \in I$ und, da jedes Y_i ein Unterraum von X ist, folgt $\alpha x + \beta y \in Y_i$ für jedes $i \in I$. Dies impliziert, dass $\alpha x + \beta y \in \bigcap\limits_{i\in I} Y_i$.

(b): Wir zeigen $Y := \sum_{i\in I} Y_i$ ist ein Unterraum von X. Dazu sei $x = \sum_{i\in I} x_i$ und $y = \sum_{i\in I} Y_i$ mit $x_i, y_i \in Y_i$ und wir erhalten:

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i\in I} x_i + \beta \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} (\alpha x_i + \beta y_i) \in Y \tag{83}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: Y ist kleinster Unterraum, der alle y_i enthält.

Dazu sei $Z \subseteq Y$ ein weiterer Unterraum von X der alle y_i enthält. Für $x_i \in Y_i$ ist dann auch $x_i \in Z$ für alle $i \in I$, da Y_i in Z enthalten sind. Aus der Unterraumeigenschaft von Z resultiert $\sum_{i\in I} x_i \in Z$ und folglich ist $Y \subseteq Z$.

□

2.3 Lineare Abhängigkeit

Gegeben sei eine nichtleere Menge $\mathcal{S}$ von Vektoren aus einem linearen Raum X über dem Körper $\mathbb{K}$.

Existieren zu einem gegebenen $x \in X$ dann endlich viele Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{K}$ und $x_i \in \mathcal{S}$, $1 \leq i \leq n$, mit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, so bezeichen wir x als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{S}$.

2.3.1 Definiton: Spann

Es sei $\mathcal{S} \subseteq X$. Der **Spann** oder die **lineare Hülle** $span\mathcal{S}$ von $\mathcal{S}$ ist eine Menge aller Linearkombinationen der Vektoren aus $\mathcal{S}$.

Ferner setzt man auf $span\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

2.3.2 Beispiel

Für enddliche $\mathcal{S} = \{x_1, ..., x_n\}$ ist

$$span\mathcal{S} = \{\sum_{i=i}^{n} \alpha_i x_i \in X : \alpha_i \in \mathbb{K}\} \tag{84}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} : e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $span\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$.
$span\{x_1, x_2\} = R^2$, wenn $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Aber $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dann $span\{y_1, y_2\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$.

2.3.3 Beispiel: Monome

Polynome $m_n(t) := t^n, n \in \mathbb{N}_0$ heißen Monome. Dann lassen sich die Polynome als lineare Hülle der Monome darstellen. Das heißt $span\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = P(\mathbb{K})$ insbesondere ist $span\{m_0, ..., m_n\} = P_n(\mathbb{K})$

$$span\{m_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{p \in P(\mathbb{K}) : p(t) = p(-t) \text{ auf } \mathbb{K}\} \tag{85}$$

$$span\{m_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{p \in P(\mathbb{K}) : -p(t) = p(-t) \text{ auf } \mathbb{K}\} \tag{86}$$

Mengen der achsen- oder punktspiegelbaren Polynome

2.3.4 Proposition

Es sei $\mathcal{S} \subseteq X$ nichtleer. Dann ist die Lineare Hülle von $\mathcal{S}$ der kleinste $\mathcal{S}$ umfassende Unterraum von X.

Beweis:

Wenn $x, y \in \mathcal{S}$ ist $\alpha x + \beta y$ in $span\mathcal{S}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$
Also ist $span\mathcal{S}$ Unterraum von X.
$span\mathcal{S}$ enhält die Vektoren aus $\mathcal{S}$ und damit ist $\mathcal{S} \subseteq span\mathcal{S}$
$Y \subseteq X$ ist ein Unterraum von X mit $x \in Y$ für sämtliche $x \in \mathcal{S}$. Dann liegen sämtliche Linearkombinationen von Vektoren aus $\mathcal{S}$ in Y. Also ist $span\mathcal{S}$ in Y enthalten.
□

2.3.5 Korrolar

Ist x eine Lienarkombination von Vektoren aus $\mathcal{S} \subseteq X$, so gilt. $span\mathcal{S} = span(\mathcal{S} \cup \{x\})$.

Beweis Wir zeigen die Behauptung durch zwei Inklusionen

- $(\subseteq)$: Es ist klar, dass $span\mathcal{S} \subseteq span(\mathcal{S} \cup \{x\})$.
- $(\supseteq)$: Als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{S}$ liegt x auch in $span\mathcal{S}$. Demnach ist $span\mathcal{S}$ derjenige Unterraum welcher $\mathcal{S}$ und x enthält.

Damit folgt aus Proposition 2.3.4, dass $span(\mathcal{S} \cup \{X\}) = span\mathcal{S}$.
□

2.3.6 Definition: Lineare Unabhängigkeit

Eine endliche Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ von Vektoren aus X heißt **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = 0 \Rightarrow \xi_k = 0 \text{ für alle } k = 1, ..., n \tag{87}$$

Für beliebige Mengen $\mathcal{S} \subseteq X$ nennt man $\mathcal{S}$ **linear unabhängig**, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist. Die leere Menge $\emptyset$ wird als linear unabhängig betrachtet. Eine Teilmenge von X heißt linear abhängig, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Man nennt die Vektoren $x_1, x_2, ...$ linear unabhängig, venn $\{x_1, x_2, ...\}$ diese Eigenschaft hat.

Einschub: Griechische Buchstaben (die Herr Pötzsche mag)

- η eta
- ξ xi
- Ξ Xi
- ζ zeta
- λ lambda
- Ω Omega
- χ chi

2.3.7 Bemerkung

1. Lineare Abhängigkeit einer endlichen Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ bedeutet, dass eine nichttriviale Darstellung der Null aus Vektoren x_k existiert.

   Man kann also

   $$(2.3a) : \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = 0 \tag{88}$$

   schreiben, ohne dass alle ξ_k verschwinden.

2. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

2.3.8 Beispiel

Die Menge $\{0\}$ ist linear abhängig; dagegen ist $\{x\}, x \neq 0$ linear unabhängig.

2.3.9 Poposition

Es sei $\mathcal{S} \subseteq X$ nichtleer und $x_1, ..., x_n \in X$.

a) Ist $\mathcal{S} = \{x_1, ..., x_n\}$ linear abhängig, so lässt sich mindestens ein Vektor aus $\mathcal{S}$ als Linearkombination der weiteren Elemente von $\mathcal{S}$ darstellen.

b) Für jede Linearkombination x aus $\mathcal{S}$ ist $\mathcal{S} \cup \{x\}$ linear abhängig.

Beweis

a) Weil $\{x_1, ..., x_n\}$ linear abhängig ist, besitzt 0 die Darstellung (2.3a) (Siehe 2.3.7) in welcher nicht alle ξ_k verschwinden. Also existiert ein Index $1 \leq k^* \leq n$ mit $\xi_{k^*} \neq 0$ und damit

$$x_{k^*} = -\xi_{k^*}^{-1} \sum_{k=1, k \neq k^*}^{n} \xi_k x_k = \sum_{k_1, k \neq k^*}^{n} (-\xi_{k^*}^{-1} \xi_k) x_k \tag{89}$$

b) Mit $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$ ist $x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$ eine nichttriviale Darstellung der 0.

In $X = \mathbb{K}^m$ gilt: Es sei $\mathcal{S} = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{K}^m$. Mit der $m \times n$-Matrix $A := (a_1, ..., a_n)$ ist die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k = 0 \tag{90}$$

(vgl. (2.3a) in Bemerkung 2.3.7) äquivalent zu:

$$(2.3b) : Ax = 0, x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{91}$$

Demzufolge ist $\mathcal{S}$ genau dann linear unabhängig, wenn $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Aus Satz 1.4.8 (in Verbindung mit Blatt 5, Aufgabe 1) erhalten wir daher, dass mehr als m Vektoren stehst linear abhängig sind.

2.3.10 Beispiel

1. Für die **kanonischen Einheitsvektoren** in $\mathbb{K}^m$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{92}$$

gilt in obiger Terminologie $A = I_m$. Also besitzt $Ax = 0$ nur die triviale Lösung und $\{e_1, ..., e_m\}$ ist linear unabhängig.

2. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$: Um die lineare Unabhängigkeit von

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{93}$$

in $\mathbb{R}^3$ zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung (2.3b) (vgl. 2.3.9) mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & \lambda \end{pmatrix} \tag{94}$$

und lösen sie mit dem im Beispiel 1.4.7 beschriebenen Schema:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda & 0 \end{array}\begin{array}{c} \\ |2I-II \\ |3I-III \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 21-\lambda & 0 \end{array}\begin{array}{c} \\ |:3 \\ |III-2II \end{array} \tag{95}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 0 \end{array} \tag{96}$$

Also hat $Ax = 0$ für $\lambda \neq 9$ nur die triviale Lösung (lineare Unabhängigkeit von $\{x_1, x_2, x_3\}$ und für $\lambda = 9$ nichttriviale Lösungen (lineare Abhähngigkeit).

2.3.11 Satz

Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq X$ ist genau dann linar unabhängig, wenn jedes $x \in span\mathcal{S}$ auf nur eine Art (bis auf Glieder mit Nullkoeffizienten) als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{S}$ dargestellt werden kann.

2.4 Basis und Dimension

Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

2.4.1 Definition: Basis

Eine Menge $\mathcal{X} \subseteq X$ heißt **Basis** von X, falls $\mathcal{X}$ linear unabhängig mit $X = span\mathcal{X}$.

Eine Menge $\mathcal{X}$ mit $X = span\mathcal{X}$ heißt **Erzeugendes System** (EZS) von X. Man nennt X endlich erzeugt, falls er ein endliches EZS besitzt.

2.4.2 Beispiel

Die Basis von $\{0\}$ ist die leere Menge

2.4.3 Beispiel: Standardbasis

Die mittels der kanonischen Einheitsvektoren aus Beispiel 2.3.10(1) gebildete Menge $\mathcal{E}_m := \{e_1, ..., e_m\}$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^m$, die sogenannte **Standardbasis**, damit ist $\mathbb{K}^m$ endlich erzeugt.

2.4.4 Beispiel: Polynome

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind $M_n := \{m_0, ..., m_n\}$ aus Beispiel 2.3.3 eine Basis der Polynome $P_n(\mathbb{K})$ von maximalem Grad n. Ebenso ist $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $P(\mathbb{K})$. Somit ist jedes $P_n(\mathbb{K})$ endlich erzeugt. $P(\mathbb{K})$ dagegen nicht.

2.4.5 Lemma

Es sei $\mathcal{S} \subseteq X$ linear unabhängig. Gilt dann $x \notin span\mathcal{S}$, so ist auch $\mathcal{S} \cup \{x\}$ linear unabhängig.

Beweis

Es ist nachzuweisen, dass jede endliche Teilmenge von $\mathcal{S} \cup \{x\}$ linear unabhängig ist. Dazu sei $\{x_1, ..., x_n, x\}$ eine solche Menge und $\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k + \eta x = 0$ eine Darstellung der Null. Wäre $\eta \neq 0$, so könnte man x als Linearkombination der $x_1, ..., x_n$ darstellen, dies widerspricht $x \notin span\mathcal{S}$. Also gilt $\eta = 0$. Da aber $\{x_1, ..., x_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $\xi_1 = ... = \xi_n = 0$. In trivialer Weise ist X ein EZS von X. Unser Interesse besteht aber gerade in „kleinen" EZSen.

2.4.6 Satz

Mit nicht leerem $\mathcal{X} \subseteq X$ sind äquivalent:

a) $\mathcal{X}$ ist eine Basis von X

b) Jeder Vektor $x \in X$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{X}$ darstellen.

c) $\mathcal{X}$ ist **maximal linear unabhängig**, d.h. $\mathcal{X}$ ist linear unabhängig und für jedes $x \in X \setminus \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \cup \{x\}$ linear abhängig.

d) $\mathcal{X}$ ist ein **minimales EZS**, d.h. keine echte Teilmenge von $\mathcal{X}$ ist ein EZS.

2.4.7 Bemerkung: Koordinaten

Besitzt $x \in X$ bzgl. der Basis $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_n\}$ die nach Satz 2.4.6(b) eindeutige Darstellung $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$ mit Koeffizienten $\xi_k \in \mathbb{K}$ so bezeichnet man das n-tupel $(\xi_1, ..., \xi_n)$ als **Koordinaten** von x (bzgl. $\mathcal{X}$).

Von nun an sei X endlich erzeugt.

2.4.8 Satz

Jedes endliche EZS eines Vektorraumes enthält eine Basis. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte lineare Raum eine Basis.

Beweis

Es sei $\mathcal{X}$ ein endliches EZS. Ist $\mathcal{X}$ keine Basis, so kann $\mathcal{X}$ nicht minimal sein und es existiert eine echte Teilmenge $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}$, die ebenfalls ein EZS ist. Ist wiederum $\mathcal{X}^1$ keine Basis, so existiert erneut eine echte Teilmenge $\mathcal{X}^2 \subset \mathcal{X}^1$, die X erzeugt. Durch Iteration erhält man eine echt absteigende Folge von Teilmengen $... \subset \mathcal{X}^2 \subset \mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}$. Diese Folge bricht nach endlich vielen Schritten ab, da $\mathcal{X}$ endlich ist, d.h. es gibt ein minimales $\mathcal{X}^k$. Dieses $\mathcal{X}^k$ ist nach Satz 2.4.6 eine Basis von X.

2.4.9 Proposition

Ist X endlich erzeugbar und $\mathcal{S} \subseteq X$ linear unabhängig, so existiert eine Basis von X, welche $\mathcal{S}$ als Teilmenge enthält.

2.4.10 Lemma: Austauschsatz von Steinitz

Ist $\{x_1, ..., x_p\}$ linear unabhängig und $\{y_1, ..., y_n\}$ ein EZS von X, so gilt $p \leq n$ und nach einer Umnummerierung der y_k ist $\{x_1, ..., x_p, y_{p+1}, ..., y_n\}$ ein EZS von X.

2.4.11 Satz: Dimension

Falls X eine Basis von n Elementen besitzt, enthält jede Basis von X genau n Elemente. Wir bezeichnen n als **Dimension** von X und schreiben $n = dimX$.

2.4.12 Bemerkung

Ein linearer Raum X heißt **unendlich-dimensional** (symbolisch: $dimX = \infty$) falls er kein endlichen EZS besitzt, anderenfalls heißt er **endlich-dimensional**.

Beweis

Es seien $\{x_1, ..., x_n\}$ und auch $\{y_1, ..., y_m\}$ Basen von X. Mit Lemma 2.4.10 folgt dann $n \leq m$, wie auch $m \leq n$, und somit $m = n$.

2.4.13 Beispiel

Für die bislang betrachteten Räume ist $dim\mathbb{K}^n = n$, $dim\mathbb{K}^{m\times n} = m \cdot n$, $dimP_n(\mathbb{R}) = n+1$ und $dimP(\mathbb{R}) = dimC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = dimC(\mathbb{R},\mathbb{R}) = dimF(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$.

C^1 ist die Menge der differenzierbaren Funktionen, C ist die Menge der stetigen Funktionen.

2.4.14 Beispiel

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und ein 1-dimensionaler Raum über $\mathbb{C}$.

2.4.15 Korollar

In linearen Räumen X mit $n := dimX$ gilt:

1. Weniger als n Vektoren aus X sind kein EZS.
2. Mehr als n Vektoren aus X sind linear abhängig.
3. Jedes EZS mit n Elementen ist eine Basis.
4. Jede linear unabhängige Menge mit n Elementen ist eine Basis.

Beweis

1. jedes EZS enthält laut Satz 2.4.8 eine Basis. Für jedes aus weniger als n Vektoren bestehenden EZS gäbe es dann auch eine Basis mit Weniger als n Elementen. Dies widerspricht Satz 2.4.11.
2. Laut Proposition 2.4.9 ist jede linear unabhängige Menge Teil einer Basis. Somit hätte man mit einer linear unabhängigen Familie von mehr als n Vektoren auch eine Basis mit mehr als n Elementen – im Widerspruch zu 2.4.11.
3. Ein EZS enthält wegen Satz 2.4.8 eine Basis und ist wegen Satz 2.4.11 bereits eine solche.
4. Mit Proposition 2.4.9 ist eine linear unabhängige Familie Teilmenge einer Basis und mit Satz 2.4.11 eine Basis.

2.4.16 Korollar

Für jeden Unterraum Y eines endlich-dimensionalen Raumes X ist $dim Y \leq dim X$, Gleichheit gilt genau für $X = Y$.

2.5 Komplemente und direkte Summen

Wieder sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

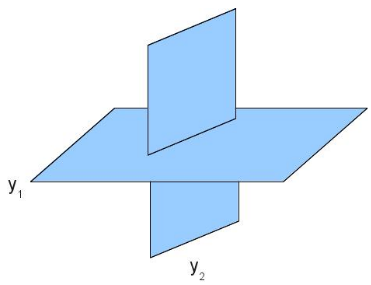
2.5.1 Definition: Direkte Summe

Es seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Unterräume. Dann heißt Y_2 **Komplement** von Y_1 in X, falls gilt:

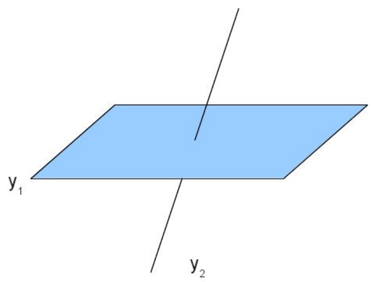
1. $Y_1 + Y_2 = X$
2. $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

man schreibt $X = Y_1 \oplus Y_2$ und nennt X direkte Summe von Y_1, Y_2

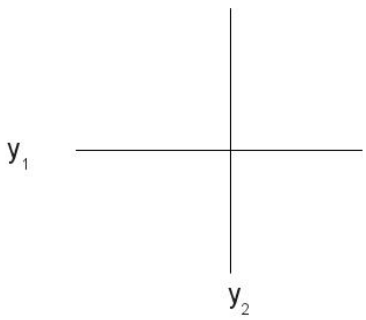
Beispiele in $\mathbb{R}^3$



$y_1 \cap y_2 \neq \{\}$



$y_1 \oplus y_1 = \mathbb{R}^3$



$y_1 + y_1 \subset \mathbb{R}^3$

2.5.2 Beispiel

Im Raum $X = \mathbb{R}^3$ ist die Gerade

$$Y_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in X : x_1 = x_2 = x_3 \right\} \tag{97}$$

ein Komplement zur Ebene

$$Y_1 := \{x \in X : x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \tag{98}$$

In der Tat liegt $x \in Y_1 \cap Y_2$, so erfüllen die Elemente des Durchschnittes

$$\begin{cases} x_1 - & x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - & x_2 & = 0 \\ & x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \tag{99}$$

und folglich $x = 0$; dies bedeutet $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$. Andererseits liegen

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ in } Y_1 \text{ und } y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } Y_2 \tag{100}$$

Da $\{y_1, y_2, y_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3 = X$ bilden, gilt auch $Y_1 + Y_2 = X$

2.5.3 Beispiel

Wir betrachten den Unterraum $Y_1 := \{p \in P(\mathbb{K}) : p(0) = 0\}$ von $X = P(\mathbb{K})$. Dann gilt $P(\mathbb{K}) = Y_1 \oplus P_0(\mathbb{K})$, d.h. der lineare Raum aller konstanten Polynome ist ein Komplement von Y_1.

2.5.4 Satz

Es seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Unterräume. Es ist $X = Y_1 \oplus Y_2$ genau dann, wenn es zu jedem $x \in X$ eindeutige $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ mit $x = y_1 + y_2$ gibt.

Beweis

($\Rightarrow$) Es sei Y_2 ein Komplement von Y_1 in Y. Wegen $Y_1 + Y_2 = X$ lässt sich jedes $x \in X$ darstellen als $x = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$. Um deren Eindeutigkeit zu verifizieren, seien $\hat{y_1} \in Y_1, \hat{y_2} \in Y_2$ zwei weitere Vektoren mit $x = \hat{y_1} + \hat{y_2}$. Das impliziert $y_1 - \hat{y_1} = \hat{y_2} - y_2$ und $y_i - \hat{y_i} \in Y_1$ für $i = 1, 2$ und folglich $y_1 - \hat{y_i} \in Y_1 \cap Y_2$ für $i = 1, 2$. Wegen $Y_1 \cap Y_1 = \{0\}$ folgt $y_1 = \hat{y_1}$ und $y_2 = \hat{y_2}$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt seien $Y_1, Y_2 \in X$ Unterräume derart, dass sich jedes $x \in X$ eindeutig als Summe $x = y_1 + y_2$ mit $y_i \in Y_i, i = 1, 2$ darstellen lässt. Dann gilt sicherlich $Y_1 + Y_1 = X$. Ist nun $x \in Y_1 \cap Y_2$, so gilt $x = x + 0 = 0 + x$ und da die Darstellung eindeutig sein muss, resultiert $x = 0$, also $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

□

2.5.5 Satz

Jeder Unterraum eines endlich dimensionalen Raumes hat ein Komplement

Beweisansatz Ergänze eine Basis von Y_1 zu einer Basis von X, gemäß Proposition 2.4.9.

$\square$

2.6 Anwendung: Matrizen und lineare Gleichungen

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit den n Spalten und den m Zeilen. Die n Spalten seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}^m$ und $a^1, ..., a^m \in \mathbb{K}^{1 \times m}$ die Zeilen von A.

Man bezeichnet den Unterraum $span\{a_k\}_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathbb{K}^m$ als **Spaltenraum** und $span\{a^1, ..., a^m\} \subseteq \mathbb{K}^{1 \times n}$ als **Zeilenraum** von A.

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1, ..., a_n) \tag{101}$$

2.6.1 Definition: Rang einer Matrix

Der **Rang** rkA einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Dimension ihres Zeilenraumes *(entspricht der Dimension des Spaltenraumes).*

2.6.2 Bemerkung

$0 \leq rkA \leq m$

$$(L_0) \qquad Ax = 0 \tag{102}$$

2.6.3 Proposition

Der Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ von (L_0) erfüllt

$$\dim L_0 = n - rkA \tag{103}$$

gleichbedeutend mit:

$$\dim N(T_A) = n - rkA \tag{104}$$

Beweis

Wir können o.B.d.A annehmen, dass $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in strenger Zeilen-Stufen-Form ist. *Zeilenraum ändert sich bei Anwendung elementarer Matrixtransformationen nicht.* Es sei r die Anzahl der Zeilen von A, welche mindestens ein Element $\neq 0$ besitzen – dies ist der Rang von A. Für $1 \leq i \leq r$ sei j_i derjenige Spaltenindex, in welcher das erste Element $\neq 0$ der i-ten Zeile steht. Weiter seien $k_1, ..., k_{n-r}$ diejenigen Elemente von $\{1, ..., n\}$, welche nicht in $\{j_i, ..., j_r\}$ sind.

Dann gilt:

$$L_0 = \left\{ X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : \xi_1, ..., \xi_{k_{n-r}} \in \mathbb{K} \text{ und} \right.$$
$$\left. \xi_{j_i} = -\frac{1}{a_{i,j_i}} \sum_{j=1}^{n-r} a_{i,k_j} \xi_{k_j} \text{ für } 1 \leq i \leq r \right\} \tag{105}$$

und $x_1, ..., x_{n-r} \in \mathbb{K}^n$ bezeichne die Vektoren in L_0 mit $\xi_{k_j} = 1$ und $\xi_{k_j} = 0$ für $i \neq j$. Man überlegt sich nun, dass $\{x_1, ..., x_{n-r}\}$ eine Basis von L_0 und die Behauptung folgt.

3 Lineare Abbildungen

Es seien X, Y lineare Räume über dem selben Körper $\mathbb{K}$.

3.1 Grundlagen

3.1.1 Difiniton: Lineare Abbildung

Eine **lineare Abbildung** $T : X \to Y$ erfüllt die Eigenschaft

$$(3.1a)\quad T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 \tag{106}$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X$. Für die Menge aller solchen linearen abbildungen schreiben wir $L(X, Y)$.

Für lineare Abbildungen schreibt man $Tx := T(x)$

3.1.2 Bemerkung

1. Für $T \in L(X, Y)$ ist $T0 = 0$
2. Die Menge $L(X, Y)$ ist ein Unterraum von $F(X, Y)$, wir kürzen ferner ab $L(X) := L(X, X)$. Ist Z ein weiterer linearer Raum und $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$, so ist auch die Komposition $S \circ T : X \to Z$ linear. $(L(X), \circ)$ ist eine Halbgruppe mit neutralem Element id_X.

3.1.3 Beispiel

Die **Nullabbildung** $0 : X \to Y, 0x := 0 \in Y$ ist linear, wie auch die identische Abbildung $id_X : X \to X$ aus Beispiel 1.2.3.

3.1.4 Beispiel: Affine Abbildungen

Eine Abbildung $S : X \to Y$ heißt **affin**, falls es $T \in L(X, Y)$ und $y \in Y$ derart gibt, dass $S(x) = Tx + y$. S ist genau dann linear, falls $y = 0$.

3.1.5 Beispiel: Die Abbildung T_A

Die wichtigsten linearen Abbildungen dieser Vorlesung sind von der Form

$$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, T_A x = Ax \text{ mit } A \in \mathbb{K}^{m \times n} \tag{107}$$

Auch die Abbildung

$$\mathbb{K}^{m \times n} \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), A \to T_A \tag{108}$$

ist linear.

3.1.6 Beispiele

1. Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $x \in \Omega$. Dann ist die **Auswertung** $ev_x : F(\Omega, X) \to X, ev_x(u) := u(x)$ linear.
2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist die **Differeziation** $D : C^1(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R}), D_u := u'$ linear.

3. Mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dem fixen $t_0 \in I$ und den reellen Zahlen $a < b$ definieren auch nachfolgende Integrale lineare Abbildungen:

$$T_1 : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T_1 u := \int_a^b u(s)\ ds \tag{109}$$

$$T_2 : C(I,\mathbb{R}) \to C^1(I,\mathbb{R}), \quad (T_2 u)(t) := \int_{t_0}^t u(s)\ ds \tag{110}$$

3.1.7 Beispiel: Vorwärts-Schift

Es sei X ein linearer Raum und $\mathbb{I} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$. Bezeichnet dann $l(\mathbb{I})$ den linearen Raum aller Folgen $F(\mathbb{I}, X)$, so ist der durch $(S\Phi)_k := \Phi_{k+1}$ definierte **Vorwärts-Schift** eine Abbildung $S \in L(\mathbb{I}))$.

3.1.8 Definiton: Kern, Bild, Rang

Ist $T \in L(X,Y)$ so bezeichnet $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ den **Kern** (oder Nullraum), $R(T) := TX$ das **Bild** und $rkT := \dim R(T)$ den **Rang** von T.

Eine Verbindung des Begriffes „Rang einer Matrix“ (Definition 2.6.1) und Definition 3.1.8 wird im Satz 3.3.8 hergestellt.

3.1.9 Proposition

Für jedes $T \in L(X,Y)$ ist der Kern $N(T)$ ein Unterraum von X und das Bild ein Unterraum von Y.

Beweis Übungsaufgabe

3.1.10 Satz

Für jedes $T \in L(X,Y)$ gilt

a) T ist genau dann injektiv, wenn $N(T) = \{0\}$, also der Kern trivial ist.

b) T ist genau dann surjektiv, wenn $R(T) = Y$.

Beweis

a) Die Abbildung T ist genau dann nicht injektiv, wenn es $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ derart gibt, dass $x_1 \neq x_2$ und $Tx_1 = y = Tx_2$. Dies ist äquivalent zu $T(x_1 - x_2) = 0$, also $0 \neq x_1 - x_2 \in N(T)$.

b) ist genau die Definition von Surjektivität

□

3.1.11 Beispiel

1. Die Auswertung $ev_x : F(\Omega, X) \to$ aus Beispiel 3.1.6(1) hat den Kern $N(ev_x) := \{u \in F(\Omega, X) : u(x) = 0\}$ und das Bild $R(ev_x) = X$.

   Ein Urbild zu einem beliebigen $y \in X$ ist gerade die konstante $u(x) \equiv y$ auf Ω.

2. Für die Nullabbildung $0 \in L(X, Y)$ ist $N(0) = X$ und $R(0) = \{0\}$. Für $X \neq \{0\}$ ist 0 nicht injektiv. Für $Y \neq \{0\}$ ist 0 nicht surjektiv.

3. Mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aus Beispiel 3.1.5

   - injektiv, wenn die linear homogene Gleichung (L_0) nur die triviale Lösung hat.
   - surjektiv, wenn es für jede Inhomogenität $b \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^m$ von (L_b) gibt.

4. Bei der Differenziation $D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \to C([a, b], \mathbb{R})$ aus Beispiel 3.1.6(2) besteht der Kern $N(D)$ aus allen konstanten Funktionen. Für das Bild $R(D)$ erhalten wir dagegen $C([a, b], \mathbb{R})$, denn für ein beliebiges $v \in C([a, b], \mathbb{R})$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung $Du = v$ mit $u(t) := v(a) + \int_a^t v(s)\ ds$.

   Damit ist D nicht injektiv, aber surjektiv.

3.1.12 Satz: Dimensionssatz

Für jede $T \in L(X, Y)$ mit $\dim X < \infty$ gilt

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X \tag{111}$$

Beweis

Es sei $\{x_1, ..., x_m\}$ eine Basis von $N(T)$ und $\{y_1, ..., y_n\}$ eine Basis von $R(T)$.

Wir wählen $\hat{x_1}, ..., \hat{x_n} \in X$ derart, dass $T\hat{x_i} = y_i, i \leq i \leq n$ gilt und weisen nach, dass $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_m, \hat{x_1}, ..., \hat{x_n}\}$ eine Basis von X ist.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{X} \text{ ist linear unabhängig} \\ \mathcal{X} \text{ ist ein EZS} \end{array}\right\} \dim N(T) + \dim R(T) = m + n = \dim X \tag{112}$$

3.1.13 Korrolar

Sei $T \in L(X, Y)$ ist $\{x_1, ..., x_n\}$ eine Basis von $N(T)$ und $\{x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_d\}$ eine Basis von X mit $n < d$. Das Bild $R(T)$ hat folgende Basis:

$$\{Tx_{n+1}, ..., Tx_d\} \tag{113}$$

Beweis

Sei $d = \dim X$, $n = \dim N(T)$. Nach Satz 3.1.12 gilt $\dim R(T) = d - n$. Wir suchen $d - n$ linear unabhängigie Vektoren in $R(T)$. Die Vektoren $\{Tx_{n+x}, ..., Tx_d\}$ sind $d - n$ Vektoren in $R(T)$. Wir zeigen, dass diese linear unabhängig sind.

Wir nehmen an, dass $\{Tx_{n+1}, ..., Tx_d\}$ sind linear abhängig. $\Rightarrow$ Es existiert ein Index $j^*, n < j^* \leq d$, do dass

$$Tx_{j^*} = \sum_{j=n+1, j\neq j^*}^{d} \eta_j T x_j \tag{114}$$

Das heißt

$$\sum_{j=n+1}^{d} \eta_j T x_j = 0 \tag{115}$$

mit $\eta_{j^*} = -1$.

Aus der Linearität von T folgt:

$$T(\sum_{j=n+1}^{d} \eta_j x_j) = 0 \tag{116}$$

das heißt

$$\sum_{j=n+1}^{d} \eta_j x_j \in N(T) \tag{117}$$

Weil $\{x_1, ..., x_n\}$ Basis von $N(T)$ ist, gilt:

$$\sum_{j=n+1}^{d} \eta_j x_j = \sum_{j=1}^{d} \eta_j x_j \tag{118}$$

für geeignete $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$.

Also:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j - \sum_{j=n+1}^{a} \eta_j x_j = 0 \tag{119}$$

Weil nach Voraussetzung $x_1, ..., x_d$ Basis von X ist, folgt aus (117), dass $\eta_j = 0 \; \forall 1 \leq j \leq d$. (Definiton der linearen Unabhängigkeit). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\eta_{j^*} = -1$.

Das heißt $\{Tx_{n+1}, ..., Tx_d\}$ sind linear unabhängig.

$\square$

3.1.14 Satz: Prinzip der linearen Fortsetzung

Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine Basis von X und $\{\hat{y_1}, ..., \hat{y_n}\} \subset Y$.

a) Sind $T, S \in L(X, Y)$ zwei lineare Abbildungen mit $Tx_i = Sx_i, \forall\ 1 \leq i \leq n$. Dann gilt $T = S$.

b) Es existiert genau eine lineare Abbildungen $T \in L(X, Y)$ mit $Tx_i = \hat{y_i}$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

3.1.15 Bemerkung

Für gegebenes

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k, \xi_k \in \mathbb{K} \ \forall\ 1 \leq k \leq n \tag{120}$$

gilt

$$Tx = T(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k) \overset{3.1a}{=} \sum_{k_1}^{n} \xi_k T x_k \tag{121}$$

Kenntnis der Koeffizienten ξ_k und der Werte $Tx_i, 1 \leq i \leq n$, erlaubt uns den Wert Tx zu bestimmen.

Beweis (Satz 3.1.14)

a) Sei $Tx_i = Sx_i\ \forall 1 \leq i \leq n$. Sei $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$, $1 \leq i \leq n$, $\xi_i \in \mathbb{K}$

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \xi_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i S x_i = S(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i) = SX \tag{122}$$

b) Wir definieren T wie folgt:
Der Vektor x habe die Darstellung $x = \sum_{i_1}^{n} \xi_i x_i$, $\xi_i \in \mathbb{K}$.
Wir definieren $Tx := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{y}_i$. Dann gilt $Tx_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \hat{y}_i - \hat{y}_j$
Zeige noch: T ist linear: Sei $z \in X$ dargestellt als $z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ und $\lambda \in \mathbb{K}$
Zu zeigen:

$$T(x + z) = T(x) + T(z) \text{ und } T(\lambda x) = \lambda T(x) \tag{123}$$

$$T(x+z) = T(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i) = T(\sum_{i=1} n(\xi_i + \beta_i) x_i) \overset{def}{=} \tag{124}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \beta_i) \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{y}_i + \sum_{i_1}^{n} \beta_i \hat{y}_i = Tx + Tz \tag{125}$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx \text{ analog} \tag{126}$$

3.2 Isomorphismen

3.2.1 Definiton

Eine bijektive Abbildung $T \in L(X, Y)$ heißt Isomorphismus, und wir definieren $GL(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : T \text{ bijektiv}\}$

Lineare Räume X, Y werden als isomorph bezeichnet, wenn es einen Isomorphismus $T \in L(X, Y)$ gibt. Schreibweise: $X \cong Y$

3.2.2 Bemerkung

a) Wenn Z ein weiterer $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und $T \in GL(X,Y)$ und $S \in GL(Y,Z)$, dann ist $S \circ T \in GL(X,Z)$ (Anschaulich: $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$)

   Wir schreiben $GL(X)$ für $GL(X,X)$. Mit neutralem Element id_x wird $GL(X)$ zu einer Gruppe, der sogenannten **General Linear Group**.

   Achtung: $GL(X)$ ist kein Unterraum von $L(X)$.

b) Durch $A = \{(X,Y)\ X$ und Y sind Isomorph$\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller linearen Räume erklärt.

3.2.3 Beispiel: Transponierte

Die Abbildung $\cdot^T : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{m\times n}$

$$A = (a_{ij})_{1\leq 1\leq n, 1\leq j\leq m} \to A^T = (a_{ji})_{1\leq 1\leq n, 1\leq j\leq m} \tag{127}$$

(Zeilen und Spalten vertauschen) ist ein Isomorphismus.

Für $n = m$ gilt: Das Inverse des Transponieren ist das Transponieren selbst, das heißt $((A)^T)^T = A$.

Damit ist der Raum der n-Spalten isomorph zum Raum der n-Zeilen.

3.2.4 Beispiel: Polynome

1. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $P_n(\mathbb{K})$ die Polynome vom maximalen Grad $n \in \mathbb{N}_0$. $P_n(\mathbb{K})$ ist isomorph zu $\mathbb{K}^{n+1}$ via den Isomorphismus

$$T : P_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{n+1} \tag{128}$$

$$p \to (\alpha_0, ..., \alpha_n), \text{ wobei } p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \tag{129}$$

   Zum Beispiel:

$$p(t) = t^2 + t \tag{130}$$

$$p \to (0, 1, 1, ...) \tag{131}$$

2. $$l_{00} = \{(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0)} : \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall k \geq n : a_k = 0\} \tag{132}$$

   bezeichnet die Menge aller Folgen, die schließlich (nach endlich vielen Indizes) 0 werden.

   l_{00} ist Isomorph zum Raum aller Polynome $P(\mathbb{K})$ via den Isomorphismus

$$T : P(\mathbb{K}) \to l_{00} \tag{133}$$

$$p \to (\alpha_0, ..., \alpha_n, 0, ..., 0, ...) \text{ wobei } p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \tag{134}$$

3.2.5 Lemma

Für $T \in L(X,Y)$ mit $\mathcal{S} \subseteq X$ ist auch $T\mathcal{S} \subseteq Y$ linear abhängig.

3.2.6 Satz

Es sei $T \in GL(X, Y)$. Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq X$ ist genau dann linear abhängig, wenn $T\mathcal{S} \subseteq Y$ linear abhängig ist.

Beweis:

- $\Rightarrow$ Folgt aus Lemma 3.2.5
- $\Leftarrow$ Nun sei $T\mathcal{S} \subseteq Y$ linear abhängig. Wegen $T \subseteq GL(X, Y)$ ist auch $T^{-1}(T\mathcal{S})$ nach Lemma 3.2.5 linear abhängig.

□

3.2.7 Bemerkung

Als logische Kontraposition erhalten wir, dass Isomorphismen linear unabhängige Mengen (oder Basen) auf ebensolche abbilden.

3.2.8 Proposition

Jeder n-dimensionale lineare Raum ist isomorph zu $\mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}_0$

Beweis:
Es sei X ein linearer Raum mit $n := \dim X$ und der Basis $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$. Wir definieren $T : \mathbb{K}^n \to X, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \to \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$.

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{X}$ ist $N(T) = \{0\}$, nach Satz 3.1.10(a) ist T dann injektiv. Da $\mathcal{X}$ ein EZS ist, muss T auch surjektiv sein.
□

3.2.9 Satz

Endlich dimensionale lineare Räume X, Y sind genau dann isomorph, wenn $\dim X = \dim Y$.

$$x \sim y \Leftrightarrow \dim X = \dim Y \tag{135}$$

Beweis:

- $\Leftarrow$ Es sei $n := \dim X = \dim Y$. Nach Proposition 3.2.8 existieren Isomorphismen $\Phi := X \to \mathbb{K}^n, \Psi := Y \to \mathbb{K}^n$ womit $\Psi \circ \Phi \in GL(X, Y)$ ein Isomorphismus ist.
- $\Rightarrow$ Sei $T \in GL(X, Y), \mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$. Dann ist $y_i := Tx, 1 \leq i \leq n$ nach Satz 3.2.6 Basis von Y

□

3.2.10 Satz

Für jedes $T \in L(X, Y)$ zwischen linearen Räumen X, Y mit $\dim X = \dim Y$ sind äquivalent:

a) T ist ein Isomorphismus (d.h. $T \in GL(X, Y)$)

b) T ist injektiv

c) T ist surjektiv

Beweis:
Es ist nachzeiweises, dass Surjektivität und Inejektivität unter diesen Voraussetzungen äquivalent sind.

Es sei $T \in L(x, Y)$ injektiv. Wegen Satz 3.1.10(a) ist dies äquivalent zu $N(T) = \{0\}$. Mit dem Dimensionssatz 3.1.12 ist dann $\dim R(T) = \dim X - \dim N(T) = \dim Y$ und T ist dann injektiv, wenn $\dim R(T) = \dim Y$, das heißt $R(T) = Y$ gilt. Aufgrund von Satz 3.1.10(b) folgt die Behauptung.

□

3.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien X, Y lineare Räume, $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_n\}$, $\mathcal{Y} := \{y_1, ..., y_n\}$

Wir folgern aus Satz 3.1.14, dass eine lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ durch die Bilder Tx_1 der Basisvektoren von X bestimmt ist. Sind etwa

$$(3.3a)\ Tx_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \text{ für } 1 \leq i \leq n \tag{136}$$

und

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \text{ mit } Tx = \sum_{j=1}^{m} \eta_j y_j \tag{137}$$

so resultiert

$$Tx = T(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T x_k \overset{(3.3a)}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} a_{kj} y_j \tag{138}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k) y_i \tag{139}$$

Fur die Koordinaten $\eta_i, ..., \eta_m \in \mathbb{K}$ von Tx bezüglich $\mathcal{Y}$ erhalten wir

$$(3.3b)\ \eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k \text{ für } 1 \leq i \leq n \tag{140}$$

3.3.1 Satz (darstellende Matrix)

Jedes $T \in L(X, Y)$ wird eindeutig durch eine Matrix $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beschrieben, in deren k-ter Spalte gerade die Koordinaten von Tx_k bezüglich der Basis $\mathcal{Y}$ stehen. Man nennt $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ die T **darstellende** Matrix in den Basen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

Im Fall $X = Y$ und $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ schreiben wir $T_{\mathcal{X}} := T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$.

3.3.2 Bemerkung

Wir versehen $X = \mathbb{K}^n$ und $X = \mathbb{K}^m$ mit Standardbasen $\mathcal{E}_n$ beziehungsweise $\mathcal{E}_m$ aus Beispiel 2.4.3. Für jede Abbildung $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit darstellender Matrix $T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}$ gilt dann

$$T = T_{T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}} \text{ (Erinnerung } T_A x = Ax) \tag{141}$$

3.3.3 Beispiel: Polynome

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $X = P_n(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der monomialen Basis $M_n := \{m_0, ..., m_n\}$ aus Beispiel 2.4.4. Als lineare Abbildung betrachten wir die Ableitung $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ mit den Bildern

$$Dm_0 = 0, \qquad Dm_k = km_{k-1} \ : k \in \mathbb{N} \tag{142}$$

und erhalten aus Satz 3.3.1 die darstellende Matrix.

$$D_{\mathcal{M}_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{143}$$

3.3.4 Proposition

Zu jedem $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gibt es ein $T \in L(X, Y)$ mit $A = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$

Beweis:
Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zu beliebigem $x \in X$ finden wir $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$. Die gesuchte Abbildung $T \in L(X, Y)$ ist dann

$$Tx := \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) y_i \tag{144}$$

□

3.3.5 Korollar

Für endlich dimensionale Räume X, Y sind $L(X, Y)$ und $\mathbb{K}^{\dim Y \times \dim X}$ isomorph.
Insbesondere ist $\dim L(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y$.

Beweis:
Es sei $m := \dim Y, n := \dim X$. Wir verwenden die lineare Abbildung $\Phi : L(X, Y) \to \mathbb{K}^{\dim Y \times \dim X}, \Phi(T) = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$, die in Proposition 3.3.4 konstruiert wurde.

□

3.3.6 Satz

Es sei Z ein weiterer linearer Raum mit Basis $\mathcal{Z}$. Für $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$ ist

$$(S \circ T)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} = S_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \tag{145}$$

3.3.7 Bemerkung

Für $A \in \mathbb{K}^{l\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$(3.3c)\ T_A \circ T_B = T_{AB} \tag{146}$$

3.3.8 Satz: Die Abbildung T_A

In diesem Abschnitt sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, und $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, mit $T_A x := Ax$. Die Ränge von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ stimmen überein: $rkT_A = rkA$.

3.3.9 Bemerkung

Mit den Spalten $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}^m$ von A gilt $R(T_A) = span\{a_1, ..., a_n\}$, weshalb insbesondere $R(T_A)$ und der Spaltenraum von A gleiche Dimension haben. Adererseits war rkA nach Definition 2.6.1 die Dimension des Zeilenraums von A. Daher wird Satz 3.3.8 auch formuliert als: **Spaltenrang = Zeilenrang**

Beweis:
Zunächst merken wir an, dass $N(T_A)$ mit dem Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ einer homogenen Gleichung (L_0) übereinstimmt. Nach Proposition 2.6.3 gilt also $\dim N(T_A) = n - rkA$.

Andererseits liefert der Dimensionssatz 3.1.12, dass

$$n = \dim N(T_A) + \dim R(T_A) = \dim N(T_A) + rkT_A \tag{147}$$

und folglich

$$rkT_A = rkA \tag{148}$$

Nun sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratisch mit $rkA = n$. Dies ist mit Satz 3.2.10 äquivalent dazu, dass $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ ein Isomorphismus ist. Wir interessieren uns nun für die simultane Lösbarkeit von

$$Ax = e_i \tag{149}$$

für alle $1 \leq i \leq n$, welche wir mittels der augmentierten Matrix $(A, e_1, ..., e_n) = (A, I_n) \in \mathbb{K}^{n\times(2n)}$ notieren.

Vermöge des Gauß-Verfahrens lässt sich (A, I_n) auf die Form (I_n, B) mit einem $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ bringen. Nach Konstruktion ist $AB = I_n$

3.3.10 Definition: Inverse Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, falls ein $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $AB = I_n$ existiert. Man nennt B die **Inverse Matrix** von A und schreibt $A^{-1} := B$.

3.3.11 Beispiel

Wir wollen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{150}$$

invertieren. Nach obigem Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & -1 \end{array} \tag{151}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \tag{152}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \tag{153}$$

und erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{154}$$

Eine testweise Multiplikation ergibt $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

3.3.12 Korollar

Die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist eindeutig bestimmt mit $A^{-1}A = I_n$. Ferner ist A genau dann invertierbar, wenn $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$ ist.

3.3.13 Definition: Regulär, Singulär

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **regulär**, falls $rkA = n$ gilt. Andernfalls nennen wir sie **singulär**.

3.3.14 Satz: Charakterisierung regulärer Matrizen

Folgende Aussagen sind äquivalent für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

a) $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$

b) A ist regulär ($rkA = n$)

c) Die Zeilen von A sind linear unabhängig

d) Die Spalten von A sind linear unabhängig

e) Die homogene Gleichung (L_0) hat nur die triviale Lösung

f) Für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ ist (L_b) eindeutig lösbar

g) ($\det A \neq 0$ (Vergleiche Satz 4.1.11))

Beweis:

- Die Äuqivalenz von (b) und (C) ist Definition 3.3.13.
- Aufgrund von Satz 3.3.8 und Bemerkung 3.3.9 sind auch (c) und (d) gleichwertig.
- (d) $\Rightarrow$ (e) resultiert aus Definition 2.3.6 der linearen Unabhängigkeit.
- (e) $\Rightarrow$ (f) ergibt sich aus Satz 1.4.9(a)
- (f) $\Rightarrow$ (a) nach unserer Voraussetzung (f) ist $T_A^{-1}(\{b\})$ für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ eindeutig. Also ist $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ bijektiv.
- Übung!

□

Zum Abschluss des Unterabschnittes beschäftigen wir uns mit linear-inhomogenen Gleichungen: Ihre **augmentierte Koeffizientenmatrix** $(A, b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ definieren wir durch

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{155}$$

3.3.15 Satz

Es sei $b \in \mathbb{K}^m$. Eine inhomogene Gleichung (L_b) hat genau dann eine Lösung, wenn gilt

$$rkA = rk(A, b) \tag{156}$$

Beweis:
Übungsaufgabe

3.3.16 Satz: Basiswechsel

Auf einem endlich dimensionalen Raum X seien die Basen $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_n\}$ und $\mathcal{X}' := \{x'_x, ..., x'_n\}$ gegeben. Wie varhält sich die Darstellungsmatrix von $T \in L(X)$, wenn man von $\mathcal{X}$ auf die Basis $\mathcal{X}'$ übergeht?

- Zunächst lassen sich die Elemente von $\mathcal{X}'$ darstellen durch die Elemente von $\mathcal{X}$

  $$(3.3e)\ x'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_i \tag{157}$$

  für alle $1 \le j \le n$.

  Hieraus wird die sogenannte **Basiswechselmatrix** $S = (s_{ij})_{1\le i,j\le n}$ gebildet, welche den Übergang von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{X}'$ liefert:

  Spalten von S = Koordinatenvektoren der „neuen" Basisvektoren

- Umgekehrt lassen sich die x_j durch die x_i ausdrücken. Aus $x_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} {x'}_j$ erhalten wir für alle $1 \leq j \leq n$:

$$x_j = \sum_{i=1}^n {s'}_{ij} (\sum_{k=1}^n s_{ki} x_k) = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n s_{ki} {s'}_{ij}) x_k \tag{158}$$

  Der Ausdruck in der letzten Klammer ist genau das (k, j)-te Element von SS'. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{X}$ folgern wir, dass $SS' = I_n$ und somit $S' = S^{-1}$ sein muss.

  Schließlich definiert auch jede invertierbare Matrix S einen Basiswechsel gemäß (3.3e) (siehe Satz 3.3.16) beziehungsweise ${x'}_j = Sx_j$.

Ist $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Basiswechselmatrix zwischen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}'$, so gilt

$$T_{\mathcal{X}'} = S^{-1} T_{\mathcal{X}} S \tag{159}$$

für alle $T \in L(X)$.

3.3.17 Definition: Ähnlichkeit

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ derart gibt, dass

$$B = S^{-1} A S \tag{160}$$

3.3.18 Bemerkung

1. Laut Satz 3.3.16 sind Darstellungsmatrizen bezüglich verschiedener Basen ähnlich vermöge der Basiswechselmatrix.
2. Die Ähnlichkeit von Matrizen definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Ziel: Finde „einfache“ Repräsentation. (Dreieksmatrix, Diagonalmatrix, etc.)

4 Eigenwerte

Im gesamten Kapitel sei X ein linearer Raum über dem Körper $\mathbb{K}$.

4.1 Determinanten

Wir beginnen mit einem Exkurs über Permutationen. Dazu sei $(S_n, \circ)$ die im Beispiel 2.1.7 eingeführte Symmetrische Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von $\{1, ..., n\}; n \in \mathbb{N}$. Ihre Elemente σ werden als **Permutationen** bezeichnet (von $\{1, ..., n\}$) und man notiert sie als Schema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{161}$$

oder als n-Tupel $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$. Weil σ bijektiv ist, kommt jede Zahl $j \in \{1, ..., n\}$ genau einmal in $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ vor; ferner gbit es genau $n!$ solche Permutationen.

4.1.1 Definition: Signum

Es sei $\sigma \in S_n$ und $s(\sigma)$ bezeichnet die Anzahl der Paare $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Dann ist das **Signum** einer Permutation σ definiert durch

$$sgn\ \sigma := (-1)^{S(\sigma)} \tag{162}$$

$sgn = 1$ entspricht einer geraden Anzahl an Vertauschung zweier Elemente in einer Permutation. $sgn = -1$ einer ungeraden Anzahl an vertauschungen.

4.1.2 Beispiel

Für die identische Permutation $id = (1, 2, ..., n)$ gilt $s(\sigma) = 0$ und folglich $sgn\ id = 1$.

Weiter erhält man $\sigma = (2, 1, 3, 4, ..., n)$, $s(\sigma) = 1$, $sgn\ \sigma = -1$.

$\sigma = (n, n-1, ..., 2, 1)$, $s(\sigma) = \frac{(n-1)n}{2}$, $sgn\ \sigma = (-1)^{s(\sigma)}$

4.1.3 Proposition

Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $sgn\ \sigma \circ \tau = sgn\ \sigma \circ sgn\ \tau$.

Beweis:
Es seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Q}$ parrweise verschieden. Dann sind auch $y_i := x_{\sigma(i)}$ mit $1 \leq i \leq n$ paarweise verschieden.

I Zunächst gilt die Identität

$$(4.1b) \qquad sgn\ \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j} \tag{163}$$

denn Zähler und Nenner des Produkts stimmen bis auf ihr Vorzeichen überein. Im Zähler tritt ein Faktor $x_k - x_l$ mit $k > l$ genau $S(\sigma)$-mal auf, während dies im Nenner nicht vorkommt.

II Aufgrund von (4.1b) erhalten wir

$$sgn\ \tau = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{y_{\tau(i)} - y_{\tau(j)}}{y_i - y_j} = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_{\sigma\circ\tau_i} - x_{\sigma\circ\tau(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} \tag{164}$$

und folglich resultiert die Behauptung aus

$$sgn\ \sigma\circ\tau \overset{(4.1b)}{=} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_{\sigma\circ\tau_i} - x_{\sigma\circ\tau(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} \tag{165}$$

$$= (\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_{\sigma\circ\tau(i)} - x_{\sigma\circ\tau(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}})(\prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}) = sgn\ \tau \cdot sgn\ \sigma \tag{166}$$

□

4.1.4 Bemerkung

Mittels Beispiel 4.1.2 ist $1 = sgn\ id = sgn\ \sigma\circ\sigma^{-1}$ und damit

$$(4.1a) \qquad sgn\ \sigma^{-1} = sgn\ \sigma \text{ für alle } \sigma \in S_n \tag{167}$$

4.1.5 Definition: Determinante

Die durch

$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} \tag{168}$$

$$(4.1c) \qquad \det\ A := \sum_{\sigma\in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \tag{169}$$

4.1.6 Bemerkung

1. (4.1c) heißt auch **Leibniz-Formel**
2. Es gilt die Beziehung $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$; folglich ist die Determinante für $n \geq 2$ nicht linear.

4.1.7 Beispiel

Wir erhalten $\det 0 = 0$ und $\det\ In = 1$.

4.1.8 Beispiel

In Dimensionen $n \leq 3$ kann die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ verhältnismäßig einfach berechnet werden.

1. Für $n = 1$ gilt $\det A = a_{11}$.
2. Für $n = 2$ ist $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ und wir erhalten

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{170}$$

3. Für $n = 3$ gilt $S_3 = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(2,1,3),(3,2,1),(1,3,2)\}$ wobei die ersten drei Permutationen das Signum 1 besitzen. Dies liefert die **Regel von Sarrus**.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \tag{171}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{172}$$

4.1.9 Lemma

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

a) $\det A = \det A^T$

b) Entsteht B durch eine Permutation $\sigma \in S_n$ der Spalten von A (das heißt ist formal $B = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)})$ oder der Zeilen von A (das heißt $B = \begin{pmatrix} a^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a^{\sigma(n)} \end{pmatrix}$, so gilt

$$\det B = sgn\ \sigma \det A \tag{173}$$

c) Falls zwei Spalten oder Zeilen von A übereinstimmen, so ist $\det A = 0$.

Beweis:
Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

a) Durch direktes Nachrechnen und (4.1a) (siehe 4.1.4) folgt

$$\det A^T \overset{(4.1c)}{=} \sum_{\sigma\in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = \tag{174}$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{j\sigma^{-1}(j)} = \det A \tag{175}$$

b) folgt ähnlich.

c) ist etwas involvierter

□

Eine zentrale Eigenschaft von Determinanten ist ihre Multiplikativität. Allerdings ist sie in Dimensionen $n > 1$ nicht additiv.

Beispiel: $\det(In + In) = 2^n$ aber $\det In = 1$

4.1.10 Satz: Multiplikativität von det

Es gilt

$$(4.1d) \qquad \det(AB) = \det A \cdot \det B \text{ für alle } A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} \tag{176}$$

Zusätzlich zu Satz 3.3.14 (Charakterisierung regulärer Matrizen) gilt:

4.1.11 Satz

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

Dann gilt

$$(4.1e) \qquad \det A^{-i} = \frac{1}{\det A} \tag{177}$$

4.1.12 Korollar

Für ähnlich Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $\det A = \det B$.

4.1.13 Bemerkung

Es sei X ein linearer Raum mit $\dim X < \infty$. Auf Basis von Korollar 4.1.12 lässt sich auch die **Determinante** $\det : L(X) \to \mathbb{K}$ einer linearen Abbildung $T \in L(X)$ definieren. Mit ihrer darstellenden Matrix $T_{\mathcal{X}}$ ist

$$\det\ T := \det\ T_{\mathcal{X}} \tag{178}$$

Hierbei ist $\det\ T$ unabhängig von der Basis $\mathcal{X}$, denn nach Satz 3.3.16 sind alle T darstelenden Matrizen ähnlich und haben gleiche Determinante.

Beweis:
Mit $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und einer regulären Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $B = S^{-1}AS$ gilt aufgrund von Satz 4.1.10 und 4.1.11

$$\det B := \det\ S^{-1}AS \overset{(4.1d)}{=} \det S^{-1}\ \det A\ \det S = \det A \tag{179}$$

□

Problem mit der Leibniz Formel (4.1c) (Siehe 4.1.5). Sehr aufwändig!

Lösung: Zu gegebenem $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $1 \leq k, l \leq n$ sei

$$A_{kl} := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, i \neq k \\ 1 \leq j \leq n, j \neq l}} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)} \tag{180}$$

diejenige Matrix, welche aus A durch Streichen der k-ten Zeile und der l-ten Spalte entsteht.

4.1.14 Propostition: Entwicklung von det

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Für alle Indizes $k, l \in \{1, ..., n\}$ gilt dann

(a) die **Entwicklung nach der k-ten Zeile**

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\ \det A_{kj} \tag{181}$$

(b) die **Entwicklung nach der l-ten Spalte**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{ij}\ \det A_{il} \tag{182}$$

4.1.15 Beispiel

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0\ \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)\ \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2\ \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 0 \tag{183}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert entsprechend:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0\ \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)3\ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + 2\ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 0 \tag{184}$$

4.1.16 Beispiel: Dreiecksmatrizen

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix, so gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4.1.17 Proposition: Inverse und det

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{ji}) \quad 1 \leq i,j \leq n \tag{185}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{ij})^T \quad 1 \leq i,j \leq n \tag{186}$$

4.1.18 Beispiel

In $\mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{187}$$

Beweis:
Mittels der Matrix $B := ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ erhalten wir durch Nachrechnen $AB = BA = \det A \cdot In$.

Wegen Korollar 3.1.12 ist $(\det A)^{-1}B$ die Inverse von A.

□

4.2 Eigentwerte und Eigenvektoren

Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Ziel: Finde zu $T \subseteq L(X)$ eine Basis $\mathcal{X}$ derart, dass $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ möglichst „einfach" ist. Hilfreich sind hierbei diejenigen Vektoren, welche von T auf ein Vielfaches abgebildet werden.

4.2.1 Definition: Eigenwert, -vektor und -raum

Existiert zu $T \in L(X)$ ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein Vektor $x \in X\backslash\{0\}$ mit

$$(4.2a) \qquad Tx = \lambda x \tag{188}$$

so nennt man x den zum **Eigenwert** λ gehörigen **Eigenvektor** von T. Der Kern $E_\lambda := N(T - \lambda id_x)$ wird **Eigenraum** von T und deren Dimension die **geometrische Vielfachheit** von λ genannt. Das **Spektrum** $\sigma(T) \subseteq \mathbb{K}$ ist die Menge aller Eigenwerte.

4.2.2 Bemerkung

1. Eine Abbildung $T \in L(X)$ besitzt genau dann nichttrivialen Kern, falls $0 \in \sigma(T)$ gilt. Im Fall $\dim X < \infty$ ist T genau dann invertierbar, wenn $0 \notin \sigma(T)$.

2. Für jedes $\lambda \in \sigma(T)$ ist der zugehörige Eigenraum E_σ **invariant** bezüglich T, das heißt
$$x \in E_\lambda \Rightarrow Tx \in E_\lambda \tag{189}$$
Ist insbesondere $m := \dim E_\lambda < \infty$, so besitzt $S := T|E_\lambda \in L(E_\lambda)$ bezüglich jeder Basis $\mathcal{X}$ von E_λ die Darstellung $S_\mathcal{X} = diag(\lambda, ..., \lambda) \in \mathbb{K}^{m \times m}$.

3. Mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ besteht das Spektrum $\sigma(T_a)$ aus allen $\lambda \in \mathbb{K}$ derart, dass der Lösungsraum der homogenen Gleichung $[A - \lambda\ In]x = 0$ nichttrivial ist; letzterer stimmt mit E_λ überein.

4.2.3 Beispiel

1. Mit der Nullabbildung $0 \in L(X)$ gilt $0x = x$ ($0 \in L(0)$ bzw. $0 \in X$)für alle $x \in X$. Folglich ist $\sigma(0) = \{0\}$ jedes $x \neq 0$ ist Eigenvektor und $E_0 = X$

2. Für die Identität id_x gilt $\sigma(id_x) = \{1\}$ und $E_1 = X$.

3. Wer betrachten die von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ induzierte Abbildung $T_A \in L(\mathbb{R}^2)$:

   - Wegen $T_A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist -1 ein Eigenwert, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zugehöriger Eigenvektor und $E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenraum zu -1; also hat -1 die geometrische Vielfachheit 1.
   - Aufgrund von $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ferner 3 ein Eigenwert, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zugehöriger Eigenvektor und $E_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geometrische Vielfachheit ist 1.

4.2.4 Beispiel: Shift-Oporator

Auf dem Folgenraum $X := F(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ betrachten wir den Vorwärts-Shift

$$(Tx)_k := x_{k+1}, T \in L(X) \tag{190}$$

Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt die Eigenwert-Eigenvektor-Beziehung ($4.2a$) (Siehe 4.2.1) genau dann, wenn

$$x_{k+1} = (Tx)_k = \lambda x_k \tag{191}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist wiederum für jede Folge $x^\lambda \in X, x_k^\lambda = \lambda^k$ erfüllt.

Im Fall $\lambda = 0$ gibt es dagegen keine Folge $X \neq 0$, welche ($4.2a$) (Siehe 4.2.1) erfüllt.

Daher besitzt der Shift-Operator das Spektrum $\sigma(T) = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und x^λ ist ein zu $\lambda \in \sigma(T)$ gehöriger Eigenvektor. Aufgrund von $E_\lambda = span\{x^\lambda\}$ besitzt jedes λ die geometrische Vielfachheit 1.

4.2.5 Proposition

Sind $\lambda_i, i \leq i \leq m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $T \in L(X)$ mit zugehörigen Eigenvektoren $x_i \in X$, so ist $\{x_1, ..., x_m\}$ linear unabhängig.

Beweis:
Induktion über m: Im Fall $m = 1$ ist wegen $x_1 = 0$ nichts zu zeigen. Es gelte nun die Aussage für *mund* wir machen den Ansatz

$$(4.2b) \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i x_i = 0 \text{ mit } \xi_1, ..., \xi_{m+1} \in \mathbb{K} \tag{192}$$

Es resultieren hieraus die Beziehungen

$$0 = T(\sum_{i=1}^{m+1} \xi_i x_i) \overset{(3.1a)}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i T x_i \overset{(4.2a)}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i \lambda_i x_i \tag{193}$$

$$0 = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i x_i = \sum_{x=1}^{m+x} \xi_i \lambda_{m+1} x_i \tag{194}$$

und durch Substraktion folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i (\lambda_i - \lambda_{m+1}) x_i \tag{195}$$

Laut Induktionsannahme ist $\{x_1, ..., x_m\}$ linear unabhängig und damit

$$\xi(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0 \tag{196}$$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, folgt zunächst $\xi_i = 0, 1 \leq i \leq m$. Mit ($4.2b$) folgt

$$\xi_{m+1} x_{m+1} = 0 \tag{197}$$

Als Eigenvektor ist $x_{m+1} \neq 0$ und daher $\xi_{m+0} = 0$

□

4.2.6 Korollar

Ist $n = \dim X < \infty$, so gilt:

a) T hat höchtens n verschiedene Eigenwerte

b) Besitzt T genau n verschiedene Eigenwerte λ_i mit zugehörigen Eigenvenktoren x_i, so ist $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_n\}$ eine Basis von X und $T_{\mathcal{X}} = diag(\lambda_i, ..., \lambda_n)$.

Beweis:

a) Hätte T mehr als n verschiedene Eigenwerte, so gäbe es mehr als n linear unabhängige Vektoren in X. Dies ist ein Widersproch zum n-dimensionalen Raum X.

b) Ergibt sich aus Korollar 2.4.15 und Bemerkung 4.2.2(2)

□

4.3 Das charakteristische Polynom

X sei linearer Raum über $\mathbb{K}$, $\dim X = n < \infty$, $\mathcal{X}$ sei Basis. Dann hat jede $T \in L(X)$ eine darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Bezeichnet $\mathcal{X}'$ eine weitere Basis von X, so folgern wir aus Satz 3.3.16 die Existenz einer regulären Basiswechselmatrix S mit $T_{\mathcal{X}'} = S^{-1}T_{\mathcal{X}}S$ und nach den Sätzen 4.1.10 und 4.1.11

$$\det(T_{\mathcal{X}'} - tIn) = \det(S^{-1}T_{\mathcal{X}}S - tS^{-1}S) \overset{(4.1d)}{=} \tag{198}$$

$$\det S^{-1} \det(T_{\mathcal{X}} - tIn) \det S \overset{(4.1e)}{=} \det(T_{\mathcal{X}} - tIn) \tag{199}$$

für alle $t \in \mathbb{K}$. Also hängen die Werte von $t \to \det(T_{\mathcal{X}} - tIn)$ nur von $T \in L(X)$ und nicht von $\mathcal{X}$ ab.

4.3.1 Definition: charakteristisches Polynom

Besitzt $T \in L(X)$ eine darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so ist das **charakteristische Polynom** von T gegeben durch $\chi_T(t) = \det(T_{\mathcal{X}} - tIn)$

4.3.2 Bemerkung

Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und die induzierte Abbildung $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ gegeben.

1. Im Fall $X = \mathbb{K}^n$ bezeichnet man χ_{T_A} auch als charakteristisches Polynom von A.

2. Die **Spur** von A ist definiert durch (vgl. Aufgabe)

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{200}$$

und mit $\chi_{T_A}(t) = c_n t + ... + c_1 t + c_0$ gibt

$$c_n = (-1)^n, \qquad c_{n-1} = (-1)^{n-1} trA, \qquad c_0 = \det A \tag{201}$$

Man sagt ein Polynom $\chi \in P_n(\mathbb{K})$ **zerfällt in Linearfaktoren** falls es Koeffizienten $\mu \in \mathbb{K}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, mit

$$(4.3a) \qquad \chi(t) \equiv \mu \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i) \tag{202}$$

auf $\mathbb{K}$.

Die Werte λ_i sind dann die Nullstellen von χ, ihre **Vielfachheit** gibt an, wie oft der **Linearfaktor** $t - \lambda_i$ in (4.3a) vorkommt.

4.3.3 Satz

Für jedes $T \in L(X)$ gilt $\sigma(T) = \chi_T^{-1}(\{0\})$ und die **Vielfachheit** von $\lambda \in \sigma(T)$ heißt **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ.

Beweis:
Mittles Definition 4.2.1 gelten die Äquivalenzen

$$\lambda \notin \sigma(T) \tag{203}$$

$$\Leftrightarrow E_\lambda = N(T - \lambda id_x) = \{0\} \tag{204}$$

$$\Leftrightarrow [T_{\mathcal{X}} - \lambda In]x = 0 \text{ hat nur die Triviale Lösung} \tag{205}$$

$$\Leftrightarrow T_{\mathcal{X}} - \lambda In \text{ ist regulär 3.3.14} \tag{206}$$

$$\Leftrightarrow \chi_T(\lambda) = \det(T_{\mathcal{X}} - \lambda In) \neq 0 \text{ nach Satz 4.1.11} \tag{207}$$

□

4.3.4 Beispiel

Es seien $\alpha \in [0, 2\pi), A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1. Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten wir $T = T_A \in L(\mathbb{R}^2)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\chi_T(t) = t^2 - 2\cos\alpha \cdot t + 1$. Für $\alpha = 0$ ist $\sigma(T) = \{1\}$ und für $\alpha = \pi$ gilt $\sigma(T) = \{-1\}$. Die Eigenwerte sind doppelte Nullstellen von χ_T und damit von algebraischer Vielfachheit 2. Ansonsten besitzt χ_T für $\alpha \notin \{0, \pi\}$ keine reellen Nullestellen, d.h. $\sigma(T) = \emptyset$.

2. Mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt $T = T_A \in L(\mathbb{C}^2)$ für alle α das Spektrum $\sigma(T) = \{\cos\alpha - i\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \cos\alpha + i\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\}$. Seine Elemente haben für $\alpha \notin \{0, \pi\}$ die algebraische Vielfachheit 1.

Wir nennen einen Körper $\mathbb{K}$ **algebraisch abgeschlossen**, falls jedes Polynom $p \in P(\mathbb{K})$ mit $deg\ p > 0$ mindestens eine Nullstelle hat.

4.3.5 Propostition

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so hat jedes $T \in L(X)$ einen Eigenwert.

4.3.6 Beispiel

1. $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen (z.B. $t^2 + 1$) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt gerade, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist; folglich zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

2. $\mathbb{Q}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen (z.B. $t^2 - 2$)

4.3.7 Satz

Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes ist kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

Beweis:
Es sei $T \in L(X)$ und $\lambda \in \sigma(T)$ mit $m := \dim E_\lambda$. Dann existieren m linear unabhängige Eigenvektoren von t in E_λ. Wählt man diese als ersten teil einer Basis $\mathcal{X}$ von X, so gilt (vgl. Bemerkung 4.2.2(2))

$$T_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \Lambda = diag(\lambda, ..., \lambda) \in \mathbb{K}^{n \times m}, \\ B \in \mathbb{K}^{m \times (m-n)}, \\ C \in \mathbb{K}^{(n-m) \times (n-m)} \end{aligned} \tag{208}$$

und wir erhalten nach Satz 4.1.14, dass

$$\chi_T(t) = (\lambda - t)^m \det(C - tI_{n-m}) \tag{209}$$

Daher ist die algebraische Vielfachheit von λ mindestens m
$\square$

4.4 Diagonalisierung und Trigonalisierung

Wir betrachten n-dimensionale lineare Räume X mit $n < \infty$.

4.4.1 Definition: diagonalisierbar, trigonalisierbar

Eine Abbildung $T \in L(X)$ heißt

a) **diagonalisierbar**, falls eine Basis $\mathcal{X}$ von X existiert, in der $T_{\mathcal{X}}$ eine Diagonalmatrix ist.

b) **trigonalisierbar**, falls eine Basis $\mathcal{X}$ von X existiert, in der $T_{\mathcal{X}}$ eine obere Dreiecksform besitzt.

4.4.2 Bemerkung

1. Entsprechend wird eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ **diagonalisierbar** (**trigonalisierbar**) genannt, falls $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ diese entsprechende Eigenschaft besitzt, beziehungsweise ähnlich zu einer Diagonalmatrix (oberen Dreiecksmatrix) ist.

2. Mit oberen Dreiecksmatrizen zu arbeiten ist reine Konvention und keine mathematische Notwendigkeit.

4.4.3 Satz: Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit

Eine Abbildung $T \in L(X)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

(i) Ihr charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren

(ii) die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes stimmt mit seiner algebraischen Vielfachheit überein.

Beweis:
Wir zeigen zwei Richtungen:

$\Rightarrow$ Es sei $T \in L(X)$ diagonalisierbar und $\mathcal{X}$ eine Basis von X derart, dass

$$T_{\mathcal{X}} = diag(a_1, ..., a_n) \text{ mit } a_1, ..., a_n \in \mathbb{K} \tag{210}$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich daher zu

$$(4.4a) \qquad \chi_T(t) = \prod_{k=1}^{n}(a_k - t)[= \det(T_{\mathcal{X}} - tIn)] \tag{211}$$

und zerfällt offenbar in Linearfaktoren. Nach Satz 4.3.7 bleibt also nachzuweisen, dass die geometrische Vielfachheit eines $\lambda \in \sigma(T)$ mindestens gleich seiner algebraischen Vielfachheit ist. Bezeichnet r die algebraische Vielfachheit von λ, so kommt der Linearfaktor $\lambda - t)$ genau r-mal in $(4.4a)$ vor, das heißt r Diagonalelemente von $T_{\mathcal{X}}$ sind gleich λ. Damit werden r Elemente der Basis $\mathcal{X}$ auf ihr λ-faches abgebildet und folglich ist $\dim E_\lambda \geq r$

$\Leftarrow$ Umgekehrt zerfalle χ_T in Linearfaktoren, es gelte die Bedingung (ii) und es sei $\sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, 1 \leq i \leq m \leq n$. Zu jedem Eigenraum E_{λ_i} wählen wir eine Basis

$$\mathcal{X}_i = \{x_1^i, ..., x_{r_i}^i\} \text{ mit } 1 \leq i \leq m, r_1 + ... + r_m = n \tag{212}$$

und erhalten somit n Vektoren in Raum X. Wir wollen zeigen, dass diesen linear unabhängig sind. Dazu sei

$$(4.4b) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \xi_j^i x_j^i = \sum_{i=1}^{m} y_i \text{ mit } y_i = \sum_{j=1}^{r_i} \xi_j^i x_j^i \tag{213}$$

und Koeffizienten $\xi_j^i \in \mathbb{K}$. Die Invarianz der E_{λ_i} zeigt, dass jedes solche $y_i \in E_{\lambda_i}$ auf sein λ_i-faches abgebildet wird, also Eigenvektor von T ist.

Mit Proposition 4.2.5 liefert dies die lineare Unabhängigkeite von $\{y_1, ..., y_n\}$. Dann muss aber

$$0 = y_1 = \sum_{j=1}^{r_i} \xi_j^i x_j^i, 1 \leq i \leq m \tag{214}$$

gelten, denn andernfalls wäre $(4.4b)$ eine nichttriviale Darstellung der 0.

Da $\mathcal{X}_i$ Basis ist, folgt $\xi_j^i = 0$ und somit sind die n Vektoren aus $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_m$ linear unabhängig, bilden also einen Basis von X, in welcher $T_{\mathcal{X}}$ diagonal ist.

□

4.4.4 Beispiel

1. Wir beobachten die lineare Abbildung

$$T \in L(\mathbb{R}^3), \qquad Tx := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} x \tag{215}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_T(t) = t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1) \tag{216}$$

Es zerfällt in Linearfaktoren und der Eigenwert -1 besitzt die algebraische Vielfachheit 2. Der Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung $[T + id]x = 0$ lautet

$$E_{-1} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{217}$$

und ist der zugehörige Eigenraum zum Eigenwert -1. Somit hat -1 die geometissche Vielfachheit 2. Der weitere Eigenwert 1 ist algebraisch einfach. Seine geometissche Vielfachheit 1 ergibt sich aus der Gleichung $[T - id]x = 0$, deren Lösungsraum

$$E_1 = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{218}$$

gerade der zum Eigenwert 1 gehörige Eigenraum ist. Deshalb garantiert Satz 4.4.3 die Diagonalisierbarkeit von T. In der Tat, mit der aus dem Eigenvektor von T gebildeten Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{219}$$

gilt

$$S^{-1}TS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{220}$$

2. Wir betrachten $T \in L(\mathbb{R}^3)$

$$Tx := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} x \tag{221}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_T(t) = -(t-2)^3 \tag{222}$$

das in Linearfaktoren zerfällt. Der Eigenwert 2 von T hat die agebraische Vielfachheit 3. Man verifiziert leicht

$$E_2 = N(T - 2id) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{223}$$

weshalb die geometrische Vielfachheit 1 ist. T ist nicht diagonalisierbar.

4.4.5 Satz: Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit

Eine Abbildung $T \in L(X)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

4.4.6 Bemerkung: Jordan-Normalform

Der Satz 4.4.5 lässt sich wesentlich präziser fassen – wenn auch mit deutlich aufwändigerem Beweis: Zu jedem $T \in L(X)$ deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt existiert eine Basis $\mathcal{X}$ von X, so dass die darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}}$ in **Jordan-Normalform** ist.

$$T_{\mathcal{X}} = diag(J_1, ..., J_i) \text{ mit } 1 \leq i \leq n \tag{224}$$

Hierbei sitzt jeder **Jordan-Block** die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{225}$$

mit $\sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ und $n_1 + ... + n_r = n$.

4.4.7 Beispiel

1. Mit $\alpha \in [0, 2\pi)$ und der aus Beispiel 4.3.4 bekannten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{226}$$

betrachten wir die induzierte lineare Abbildung $T = T_A \in L(\mathbb{R}^2)$. Ihr charakteristisches Polynom $\chi_T(t) = t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1$ hat die Diskriminante $4(\cos^2\alpha - 1)$. Daher ist T genau für $\alpha \in \{0, r\}$ trigonalisierbar über $\mathbb{R}$.

2. Weiter betrachten wir die in Beispiel 4.4.4(2) diskutierte Abbildung $T \in L(R[3])$

$$Tx := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} x \tag{227}$$

Da ihr charakteristisches Polynom $\chi_T(t) = (t-2)^3$ in Linearfaktoren zerfällt, ist sie nach Satz 4.4.5 trigonalisierbar. In der Tat liefert die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \tag{228}$$

ihre Jordan-Normalform

$$J = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{229}$$

4.4.8 Korollar

Jede lineare Abbildung $T \in L(X)$ auf einem endlich-dimensionalen Raum über $\mathbb{C}$ ist trigonalisierbar.

Beweis:
Mit dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom $p \in P(\mathbb{C})$ in Linearfaktoren, also insbesondere χ_T.
□

4.4.9 Korollar

Zerfällt χ_T in Linearfaktoren *(ist also trigonalisierbar)*, so gilt

$$\det T = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, \qquad trT = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad \text{mit } \sigma(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \tag{230}$$

Beweis:
Nach Satz 4.4.5 ist $T \in L(X)$ trigonalisierbar und folglich ist jede Darstellung $T_{\mathcal{X}}$ ähnlich zu einer Dreiecksmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ vermöge S. Dann folgt mit Korollar 4.1.12, dass $\det T = \det D = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$. Nach einer Übungsaufgabe ist

$$trT = trS^{-1}(DS) = tr(DS)S^{-1} = trD = \lambda_1 + ... + \lambda_n \tag{231}$$

□

Wir definieren die **Potenzen** $T^k \in L(X), k \in \mathbb{N}_0$, einer Abbildung $T \in L(X)$ rekursiv

$$T^0 = Id \qquad T^{k+1} := T \circ T^k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \tag{232}$$

und etsprechend für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wege $\dim L(X) = n^2$ (Korollar 3.3.5) ist die (n^2+1)-elementige Menge $\{T^0, T^1, ..., T^{n^2}\}$ linear abhängig.

Tatsächlich hat sogar $\{T^0, ..., T^n\}$ diese Eigenschaft.

4.4.10 Satz: von Cayley-Hamilton

Jede lineare Abbildung $T \in L(X)$ erfüllt ihr charakteristisches Polynom, das heißt formal $\chi_T(T) = 0$

Hieraus folgt: $\{A^k : k = 0, ..., n\}$ *ist linear abhängig.* $\{A^k : k = 0, ..., n-1\}$ *kann linear unabhängig sein, muss aber nicht.*

4.4.11 Bemerkung

1. Bezeichnet $\mathcal{X}$ eine Basis von X, so gilt für die darstellende Matrix $\chi_T(T_{\mathcal{X}}) = 0$.
2. Für jedes $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt $A^2 = (trA)A - (\det A)I_2$.

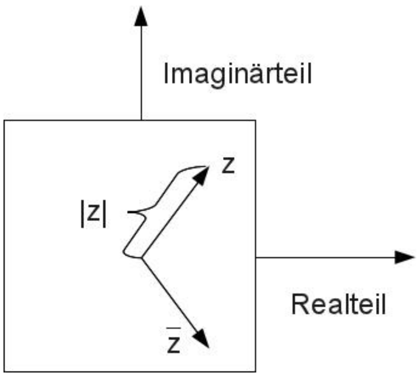
5 Innere Produkte

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir beschränken uns weiter auf reelle oder komplexe lineare Räume X. Insbesondere im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erinnern wir an das komplex-konjugierte

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy \tag{233}$$

einer komplexen Zahl $z = (x, y) = x + iy$ sowie ihren Betrag

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{234}$$



Wir betrachten $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ und erhalten:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \tag{235}$$

5.1 Skalarprodukte und Orthogonalität

5.1.1 Inneres Produkt

Ein **inneres Produkt** auf X ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ mit

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (**Linearität im 1. Argument**)

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (**Konjugierte Symmetrie**)

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$ (**positive Definitheit**)

für alle $x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ein liearer Raum mit innerem Produkt heißt **Prä-Hilbert-Raum**.

Statt innerem Produkt sagt man auch **Skalarprodukt**

5.1.2 Bemerkung

1. Aufgrund der konjugierten Symmetie ist stets $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, während die positive Definitheit $\langle x, x \rangle \rangle 0$ für $x \neq 0$ garantiert.

2. Ein inneres Produkt ist **semilinear** im zweiten Argument

$$(5.1a) \quad \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \text{ für } x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \tag{236}$$

3. Unter einer **Norm** auf X versteht man die Funktion

$$||\cdot|| : X \to \mathbb{R}, \qquad ||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{237}$$

Insbesondere gilt $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zu jedem $x \neq 0$ nennen wir $y := \frac{1}{||x||}x$ den **normierten Vektor** zu x, denn $||y|| = 1$.

5.1.3 Bemerkung: Orthogonalität

1. Die Elemente $x, y \in X$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Die resultierende Relation

$$x \perp y :\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \tag{238}$$

ist symmetrisch aber nicht transitiv. Wegen $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$ ist $0 \in X$ orthogonal zu jedem $x \in X$.

2. Die Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ heißen **orthogonal**, insofern

$$\langle y_1, y_2\rangle = 0 \text{ für alle } y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2 \tag{239}$$

5.1.4 Beipsiel: Euklidischer Raum

$\mathbb{R}^n$ mit

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \qquad ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \tag{240}$$

5.1.5 Beispiel: Unitärer Raum

$\mathbb{C}^n$ mit

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j \tag{241}$$

$n = 1, \langle i, i\rangle = i \cdot (-i) = 1$

5.1.6 Beispiel

1. Mit sogenannten **Gewichten** $\omega_1, ..., \omega_n \rangle 0$ ist auch $\langle x, y\rangle_\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j \bar{y}_j$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{K}^n$ mit induzierter Norm $||x||_\omega = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \omega_j |x_j|^2}$

2. Mit einer stetigen Gewichtsfunktion $\omega : [a, b] \to (0, \infty), a\langle b$, sind auch die stetigen Funktionen $X = C([a, b], \mathbb{R})$ ein linearer Raum mit innerem Produkt

$$(5.1b) \qquad \langle x, y\rangle_\omega := \int_a^b \omega(t)\ x(t)\ y(\bar{t})\ \ dt \tag{242}$$

5.1.7 Definition: Orthogonales Komplement

Es sei $S \subseteq X$. Dann heißt

$$S^\perp := \{x \in X : \langle x, y\rangle = 0 : \forall y \in S\} \tag{243}$$

das **orthogonale Komplement** von S (in X).

5.1.8 Beispiel

1. Es ist $\{0\}^\perp = X$ und $X^\perp = \{0\}$
2. Im Raum $X = \mathbb{R}^3$ haben wir in Beispiel 2.5.2 nachgewiesen, dass die Gerade $\tilde{Y} := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Komplement zur Ebene

$$Y := \{x \in X : x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{244}$$

ist.
Betrachtet man $\mathbb{R}^3$ als Eukliedscher Raum, so ist $\tilde{Y}$ wegen

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 \tag{245}$$

jedoch kein orthogonales Komplement von Y; vielmehr gilt $Y^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.1.9 Proposition

Für jedes $S \subseteq X$ ist $S^\perp$ ein Unterraum von X mit $(spanS) \cap S^\perp = \{0\}$.

Beweis:
Es seien $x_1, x_2 \in S^\perp$ und wir erhalten

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle = 0 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, y \in S \tag{246}$$

Dies garantiert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in S^\perp$ und $S^\perp$ ist ein linearer Raum. Weiter sei $x \in S^\perp$ und $x \in spanS$, das heißt $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ mit Koeffizienten $\xi_i \in \mathbb{K}$ und $x_i \in S$. Dies impliziert

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \xi_i x_i, x\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \langle x_i, x\rangle = 0 \tag{247}$$

(Es gilt $\langle x_i, x\rangle = 0,$ weil $x \in S^\perp$) und folglich $x = 0$
□

5.1.10 Satz

Ist $\dim X \langle \infty$ und Y ein Unterraum von X, so gilt

(a) $X = Y \oplus Y^\perp$

(b) $(Y^\perp)^\perp = Y$

(c) $\dim X = \dim Y + \dim Y^\perp$

Beweis:

(a) $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ gilt nach Proposition 5.1.9. Es bleibt $X = Y + Y^\perp$ zu zeigen. Zu jedem $x \in X$ muss es also $y \in Y$ und $y^\perp \in Y^\perp$ geben mit $x = y + y^\perp$ geben. Ist $\{y_1, ..., y_n\}$ eine **Orthonormalbasis** von Y, so definieren wir

$$y := \sum_{i=1}^{m} \langle x, y_i \rangle y_i, \qquad y^\perp := x - y \text{ usw.} \tag{248}$$

□

5.1.11 Definition: Orthogonal- und Orthonormalbasis

Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq X$ heißt

(a) **orthogonal**, falls $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x, y \in \mathcal{S}, x \neq y$

(b) **orthonormal** falls $\langle x, y \rangle = \begin{cases} 1, x = y \\ 0, x \neq y \end{cases}$ für $x, y \in \mathcal{S}$

Eine **Orthogonal-** beziehungsweise **Orthogonalbasis** von X ist eine orthogonale beziehungsweise orthonormale Basis von X.

Jede orthonormale Familie ist auch orthogonal.

5.1.12 Beispiel

1. Die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ aus Beispiel 2.4.3 ist eine Orthonormalbasis des Euklidschen Raumes $\mathbb{R}^n$ wie auch des unitären Raumes $\mathbb{C}^n$.
2. Die Legendre-Polynome $p_n \in P(\mathbb{R})$

$$p_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \tag{249}$$

   für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren eine orthogonale Familie $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezüglich des inneren Produktes (5.1b) aus Beispiel 5.1.6(2) mit $\omega(t) = 1$ auf $[-1, 1]$
3. Wir definieren die **trigonometrischen Funktionen** $c_n, s_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, c_n(t) := \cos(nt), s_n(t) := \sin(nt)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   Dann ist $\mathcal{S} := \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine orthogonale Familie in $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ bezüglich (5.1b) aus Beispiel 5.1.6(2) mit $\omega(t) = 1$ auf $[-\pi, \pi]$

5.1.13 Proposition

Jede orthogonale Familie $\mathcal{S} \subseteq X$ mit $0 \notin \mathcal{S}$ ist linear unabhängig.

Beweis:
Es sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche Teilfamlie von $\mathcal{S}$ und $\sum_{j=1}^n \xi x_j = 0$ mit Koeffizienten $\xi \in \mathbb{K}$.

Dann resultiert

$$0 = \langle 0, x \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \xi x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \langle x_j, x_k \rangle = \xi_k \langle x_k, x_k \rangle \tag{250}$$

für alle $1 \leq k \leq n$. Wegen $x_k \neq 0$ folgt $\xi_k = 0$

5.1.14 Proposition

Vorteil von Orthonormalbasen Koordinaten sind einfach berechenbar.
Ist $\{x_1, ..., x_n\}$ eine Orthonormalbasis von X, so gilt

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j : \forall x \in X \tag{251}$$

Beweis:
Da $\{x_1, ..., x_n\}$ orthonormal ist, gilt $\langle x_j, x_k \rangle = \delta_{jk}$ (siehe Beispiel 1.3.3) für $1 \leq j, k \leq n$. Die Koeffizienten $\xi_j \in \mathbb{K}$ eines beliebigen $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j$

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \langle x_j, x_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle \tag{252}$$

□

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt Berechnung von Orthogonal- bzw. Orthonormalbasen aus einer gegebenen Basis

0. Es sei eine linear unabhängige Familie $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ gegeben auf X mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
1. Setze $y_1 := x_1$
2. Für $k \geq 1$ definiere

$$(5.1c) \qquad y_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{\langle y_j, x_{k+1} \rangle}}{\langle y_j, y_j \rangle} y_j \tag{253}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ solange $x_{k+1} \in \mathcal{S}$.

Wir erhalten aus $\{x_1, x_2, ...\}$ eine Familie orthogonale Vektoren $\{y_1, y_2, ...\} = \mathcal{Y}$ und normiert man die Elemente von $\mathcal{Y}$ gemäß

$$(5.1d) \qquad z_k := \frac{1}{||y_k||} y_k \tag{254}$$

so erhalten wir sogar eine orthonormale Familie.

5.1.15 Satz

Jeder endlich-dimensionale lineare Raum mit innerem Produkt hat eine Orthonormalbasis.

Beweis:
Nach Satz 2.4.8 besitzt X eine Basis $\{x_1, ..., x_n\}$. Auf diese wenden wir obiges Gram-Schmidt-Verfahren an:
Es sei $y_1 := x_1, y_{k+1}$ für $1 \leq k \langle n$ durch (5.1c) gegeben und $\{y_1, ..., y_k\}$ bereits orthonormal. Wir erhalten dann

$$\langle y_i, y_{k+1} \rangle \overset{(5.1c)}{=} \langle y_i, x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{\langle y_j, x_{k+1} \rangle}}{\langle y_j, y_j \rangle} y_j \rangle = \tag{255}$$

$$\langle y_i, x_{k+1}\rangle - \langle y_i, \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{\langle y_j, x_{k+1}\rangle}}{\langle y_j, y_j\rangle} y_j\rangle = \tag{256}$$

$$\langle y_i, x_{k+1}\rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle y_j, x_{k+1}\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} \langle y_i, y_j\rangle \overset{5.1.14}{=} \tag{257}$$

$$\langle y_i, x_{k+1}\rangle - \langle y_i, x_{k+1}\rangle = 0 \tag{258}$$

dass y_1 für alle $1 \leq i \leq k$ orthogonal auf y_{k+1} ist.

Wir haben also induktiv eine orthogonale Familie $\{y_1, ..., y_k, y_{k+1}\}$ erzeugt. Demnach ist $\{y_1, ..., y_n\}$ eine Orthogonalbasis von X. Die gesuchte Orthonormalbasis $\{z_1, ..., z_n\}$ ergibt sich aus (5.1d).

□

5.1.16 Beispiel: Legendre-Polynome

Aufgrund von Beispiel 2.4.4 sind die Monome $\mathcal{M}_3 := \{m_0, m_1, m_2, m_3\}$ eine Basis von $P_3(\mathbb{R})$. Verwenden wir auf $P_3(\mathbb{R})$ nun das innere Produkt (vgl. (5.1b) in Beispiel 5.1.6)

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)\ q(t)\ \ dt \tag{259}$$

so ist $\mathcal{M}_3$ wegen $\langle m_k, m_l\rangle = \frac{1-(-1)^{k+l+1}}{1+k+l}$ jedoch keine Orthogonalbasis. Um eine solche zu bestimmen, verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an.

Zunächst sei dazu $p_0 = m_0$ und wegen

$$\langle p_0, m_1\rangle = 0, \langle p_0, m_2\rangle = \frac{2}{3}, \langle p_0, m_3\rangle = 0 \tag{260}$$

Ungerade Funktionen heben sich im Intervall -1 bis 1 auf. Das Integral über der quadratischen Funktion ist 2/3.

erhalten wir

$$p_1 = m_1 - \frac{\langle p_1, m_1\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 = m_1 \tag{261}$$

also $p_1(t) = t$

Mittels der Beziehungen

$$\langle p_1, m_2\rangle = 0, \langle p_1, m_3\rangle = \frac{2}{5} \tag{262}$$

ist weiter

$$p_2 = m_2 - \frac{\langle p_0, m_2\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 - \frac{\langle p_1, m_2\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 = m_2 - \frac{\langle p_0, m_2\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 \tag{263}$$

also $p_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$.

Ebenso erhält man $p_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$ und hieraus ergibt sich die Orthonormalbasis $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ des $P_3(\mathbb{R})$ mit

$$q_0(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad q_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t \quad q_2(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(t^2 - \frac{1}{3}) \quad q_3(t) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(t^3 - \frac{3}{5}t) \tag{264}$$

Fordert man nicht die Normierung $\langle q_k, q_k\rangle = 1$, sondern $q_k(1) = 1$, so ergibt sich durch Multiplikation der p_k mit einem geeigneten Faktor, dass

$$q_0(t) \equiv 1, \quad q_1(t) = t, \quad q_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad q_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \tag{265}$$

Dies sind die Legendre-Polynome aus Beispiel 5.1.12(2)

5.2 Adjungierte Abbildung

Sei X in linearer Raum über $\mathbb{K}$ mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Eine lineare Abbildung : $X \to \mathbb{K}$ heißt **Funktional**. Mit gegebenem $y \in X$ definieren wir das Funktional $y' : X \to \mathbb{K}$ durch

$$(5.2a) \qquad y'(x) := \langle x, y\rangle : \forall x \in X \tag{266}$$

Aufgrund von Definition 5.1.1(i) gilt nämlich

$$y'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \tag{267}$$

$$\alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle = \alpha_1 y'(x_1) + \alpha_2 y'(x_2) \tag{268}$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X$, also $y' \in L(X, \mathbb{K})$.

5.2.1 Satz: Riesz'scher Darstellungssatz

Ist $\dim X \langle \infty$, so gibt es zu jedem Funktional $S \in L(X, \mathbb{K})$ ein eindeutiges $y \in X$ mit $Sx = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in X$, das heißt $S = y'$.

Beweis:
Nach Satz 5.1.15 gibt es eine Orthonormalbasis $\{x_1, ..., x_n\}$ von X.

I **Existenz**: Zu beliebig gegebenem $S \in L(X, \mathbb{K})$ sei

$$(5.2b) \qquad y := \sum_{i=1}^{n} \overline{Sx_i} x_i \in X \tag{269}$$

und es gibt

$$\langle x_j, y\rangle \overset{(5.2b)}{=} \langle x_j, \sum_{i=1}^{n}\rangle \overline{Sx_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{Sx_i}} \langle x_j, x_i\rangle \overset{\langle x_j, x_i\rangle = \delta_{ij}}{=} Sx_j \tag{270}$$

für $1 \leq j \leq n$. Damit stimmen S und y' auf einer Basis von X überein, weshalb Satz 3.1.14(a) sofort $S = y'$ garantiert

II **Eindeutigkeit**: Um nachzuweisen, dass obiges y aus (5.2b) eindeutig bestimmt ist, erfülle auch $z \in X$ die Beziehung

$$Sx = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \tag{271}$$

für alle $x \in X$. Dies impliziert

$$\langle x, y - z\rangle = 0 \tag{272}$$

für alle $x \in X$ und damit $y - z = 0$

□

Nun seien $T \in L(X), y \in X$. Wir definieren $S_y : X \to \mathbb{K}$

$$S_y x := \langle Tx, y \rangle \tag{273}$$

und es folgt (mittels (3.1a) von Definition 3.1.1, sowie Definition 5.1.1(i))$S_y \in L(X, \mathbb{K})$. Bei festem $T \in L(X)$ gibt es nach Satz 5.2.1 zu jedem $y \in X$ ein eindeutiges $y_0 \in X$ mit $S_y x = x\langle x, y_0 \rangle$ für alle $x \in X$. Wir bezeichnen diese Zuordnung $y \to y_0$ mit T' und die entsprechende Abbildung $T' : X \to X$ ist festgelegt durch

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T'y \rangle : \forall x, y \in X \tag{274}$$

Aufgrund von Definition 5.1.1 erhalten wir mit beliebigen $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, dass

$$\langle x, T'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \rangle = \langle Tx, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle = \tag{275}$$

$$\overline{\alpha_1}\langle Tx, x_1 \rangle + \bar{\alpha_2}\langle Tx, x_2 \rangle = \tag{276}$$

$$\overline{\alpha_1}\langle x, T'x_1 \rangle + \bar{\alpha_2}\langle x, T'x_2 \rangle = \tag{277}$$

$$\langle x, \alpha_1 T'x_1 + \alpha_2 T'x_2 \rangle \tag{278}$$

Für alle $x \in X$. Damit ist $T' \in L(X)$

5.2.2 Definition: adjungierte Abbildung

Die zu $T \in L(X)$ **adjungierte Abbildung** $T' \in L(X)$ ist definiert durch

$$(5.2c) \qquad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T'y \rangle : \forall x, y \in X \tag{279}$$

Man beachte, dass T' vom konkret auf X verwendeten inneren Produkt abhängt.

5.2.3 Bemerkung

Direkt aus (5.2c) folgt

1. Die Abbildung $\cdot' : L(X) \to L(X)$ ist **semilinear**, das heißt

   $$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)' = \overline{\alpha_1} T_1' + \overline{\alpha_2} T_2' \tag{280}$$

   für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, T_1, T_2 \in L(X)$ und erfüllt $T'' = T$ sowie $(ST)' = T'S'$ für $S, T \in L(X)$.

   Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung sogar linear.

2. Für $T \in GL(X)$ ist auch $T' \in GL(X)$ mit

   $$(T')^{-1} = (T^{-1})' \tag{281}$$

5.2.4 Beispiel: Transponierte

Es sei $X = \mathbb{R}^n$ (Euklidisch) ausgestattet mit der Standardbasis $\mathcal{E}_n = \{e_1, ..., e_n\}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die darstellende Matrix von $T \in L(X)$, das heißt $Tx = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Bezeichnet dann $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die darstellende Matrix von T', so ist

$$a'_{ij} = \langle e_i, \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{pmatrix} \rangle = \langle e_i, T'e_j\rangle \overset{(5.2c)}{=} \langle Te_i, e_j\rangle = \langle \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{pmatrix}, e_j\rangle = a_{ji} \tag{282}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Folglich ist die adjungierte Abbildung T' in Euklidschen Räumen gerade durch die Transponierte $A' = A^T$ gegeben. (Vergleiche Beispiel 3.2.3)

5.2.5 Beispiel: Hermite'sche

Im unitären Raum $\mathbb{C}$ mit seiner Standardbasis $\mathcal{E}_n$ ergibt sich entsprechend:

$$\overline{a'_{ij}} = \langle e_i, \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{pmatrix} \rangle = \langle e_i, T'e_j\rangle \overset{(5.2c)}{=} \langle Te_i, e_j\rangle = \langle \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{pmatrix}, e_j\rangle = a_{ji} \tag{283}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Folglich ist $a'_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Für die adjungierte Abbildung im unitären Raum ist also $A' = A^*$ mit der sogenannten **Hermite'schen**

$$A^* = \overline{(A^T)} = (\overline{a_{ji}})_{1\leq i,j\leq n} \tag{284}$$

Umgangssprachlich: Die Transponierte nehmen und jedes Element komplex konjugieren

5.2.6 Satz

Ist $\dim X \langle \infty$ und $T \in L(X)$, so gilt

$$N(T') = R(T)^\perp \qquad rkT = rkT' \tag{285}$$

Beweis:

$$N(T') = \{x \in X : T'x = 0\} = \{x \in X : \langle y, T'x\rangle = 0 : \forall x \in X\} \overset{(5.2c)}{=} \tag{286}$$

$$\{x \in X : \langle Ty, x\rangle 0 : \forall y \in X\} = R(T)^\perp \tag{287}$$

Mit Satz 5.1.10(i), der eben gezeigten Ausage und Satz 3.1.12

$$rkT = \dim R(T) = \dim X - \dim R(T)^\perp = \dim X - \dim N(T') = \tag{288}$$

$$\dim R(T') = rkT' \tag{289}$$

□

5.3 Selbstadjungierte Abbildung

Wieder sei X ein linearer Raum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

5.3.1 Definition: Selbstadjungiert

Eine Abbildung $T \in L(X)$ heißt **selbstadjungiert**, falls gilt $T = T'$, das heißt

$$(5.3a) \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle : \forall x, y \in X \tag{290}$$

5.3.2 Beispiel: Euklidischer Raum

Auf dem Euklidschen Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^n)$ genau dann selbstadjungiert, falls ihre darstellende Matrix $T_{\mathcal{E}_n}$ symmetrisch ist, das heißt $A = A^T$.

Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{291}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ nicht} \tag{292}$$

5.3.3 Beispiel: Unitärer Raum

In einem unitären Raum $\mathbb{C}^n$ ist $T \in L(\mathbb{C}^n)$ dann und nur dan selbstadjungiert, wenn $A = T_{\mathcal{E}_n}$ Hermite'sch ist (Vergleiche Beispiel 5.2.5), das heißt $A = A^*$.

5.3.4 Beispiel

unwichtig

5.3.5 Satz

Es sei $\dim X \langle \infty$. Ist $T \in L(X)$ selbstadjungiert, so gilt

(a) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

(b) Es gibt eine Orthonormalbasis von X aus Eigenvektoren von T

Beweis:

(a) Eis sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T mit zugehörigem Eigenvektor $x \in X$. Da T selbstadjungiert ist, gilt

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle \overset{4.2a)}{=} \langle Tx, x\rangle = \tag{293}$$

$$\langle x, Tx\rangle \overset{(4.2a)}{=} \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle \tag{294}$$

und wegen $x \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) Induktion über $n = \dim X$. Für $n = 1$ ist nichts nachzuweisen. Für $n \rangle 1$ gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$\chi_T(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t) : \lambda_i \in \mathbb{C} \tag{295}$$

und wegen Satz 4.3.3 ist jedes λ_i Eigenwert von T. Aussage (a) garantiert sogar $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Es sei nun x_1 ein normierter Eigenvektor zu λ_1 und $X_1 := (span\{x_1\})^{\perp 1}$. Mittels Satz 5.1.10(c) ist dann $\dim X_1 = n - 1$. Für jedes $x \in X$ ist dann

$$\langle x_1, Tx \rangle \overset{(5.3a)}{=} \langle Tx_1, x \rangle \overset{(4.2a)}{\langle} \lambda_1 x_1, x \rangle = \tag{296}$$

$$\lambda_1 \langle x_1, x \rangle = 0 \qquad (\text{da: } \langle x_1, x \rangle 0) \tag{297}$$

das heißt $Tx \in X_1$. Wir haben damit gezeigt, dass X_1 invariant unter T ist. Damit induziert $T \in L(X)$ eine selbstadjungiert Abbildung $T_1 := T|_{X_1} \in L(X_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{X}_1 = \{x_1, ..., x_n\}$ von X_1 aus normierten Eigenvektoren x_1 von T. Da jeder Eigenvektor von T_1 auch Eigenvektor von T ist, muss $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Orthonormalbasis von X sein.

□

5.3.6 Bemerkung

Auf Matrizen bezogen besagt dies gerade, dass symmetrische und Hermite'sche Matrizen reelles Spektrum haben und der Raum $\mathbb{K}^n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt.

5.3.7 Korollar

Jede selbstadjungierte Abbildung ist diagonalisierbar

Beweis:
Wähle Basis aus Eigenvektoren.