Relationen

Relation R auf X: $R : \{(x, y) : x, y \in X\}$ heißt

- **Reflexiv** $\Leftrightarrow (x, x) \in R : \forall x \in X$
- **Transitiv** $\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R : \forall x, y, z \in X$
- **Symmetrisch** $\Leftrightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R : \forall x, y \in X$

Äquivalenzrelation, wenn alle 3 Eigenschaften erfüllt. $x \sim y$: x äquivalent zu y. Jedes x ist Repräsentant einer Äquivalenzklasse.

Abbildungen

Funktion Definitionsbereich, **Bildbereich**

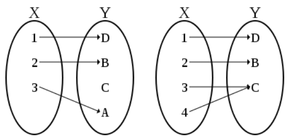
$F : D \to B$ ist Abbildung, wenn gilt $\forall x \in D$:

- $\exists y \in B : (x, y) \in F$
- $y_1, y_2 \in B : (x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$

Komposition $g \circ f : (g \circ f)(x) := g(f(x))$

$f(X)$ heißt **Bild**, $f^{-1}(Y) := x \in D : f(x) \in Y$ heißt **Urbild**

- **injektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) : \forall y \in B$ höchstens ein Element.
- **surjektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) : \forall y \in B$ mindenstens ein Element.
- **bijektiv** $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) : \forall y \in B$ genau ein Element.



injektiv surjektiv

$\exists F^{-1} : B \to D \Leftrightarrow F$ ist bijektiv. (F injektiv $\Rightarrow F^{-1}$ nur auf $F(D)$)

Komplexe Zahlen

$z = (x, y) = x + yi \quad i^2 = -1$

Konjugiert: $\overline{z} = (x, -y) = x - yi$; **Betrag**: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$

Addition: $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Differenz: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Quotient: $\frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2})$

Matrizen

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n} = (a_{i,j})_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kronecker-Symbol $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Rang einer Matrix rkA ist Dimension des Zeilen- / Spaltenraumes

Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{K}^{n \times n} := (\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

Diagonalmatrix $A_{diag} \in \mathbb{K}^{n \times n} := (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$

Obere-Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n} := (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} = 0 \ \forall i > j$

Untere-Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n} := (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} = 0 \ \forall i < j$

Skalare Multiplikation $\alpha A := (\alpha a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$

Addition $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$

Multiplikation $\mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{n \times p} \to \mathbb{K}^{m \times p}$ (Spalten A = Zeilen B)

$$AB := (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p}$$

Schema:

	B
A	C

Distributivgesetz $A(B + C) = AB + BC$

Assoziativgesetze $(\alpha A)B = A(\alpha B), \quad A(BC) = (AB)C$

Lineare Gleichungen

$(L_b) : Ax = b$ (Homogen für $b = 0$)

Superpositionsprinzip: $x, y \in L_0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L_0$

$x \in L_b \Rightarrow L_b = x + L_0$

Zeilenstufenform: Obere Dreiecksmatrix

strenge ZSF: Diagonalmatrix

Rückwärtssubstitution: Wähle $x_n = t$; Löse Gleichung entsprechend

Elementare Zeilentransformationen: Zeilen vertauschen, Skalare Multiplikation, Addition von Zeilen

$m < n$ (weniger Gleichungen als Unbekannte): (L_0) hat ∞ Lösungen

$m = n$: $L_0 = \{0\} \Rightarrow L_b$ genau 1 Lösung; Sonst: ∞ oder 0 Lösungen

Lösungsraum von $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n : L_0 := Ax = 0$ erfüllt $\dim L_0 = n - rkA$ dies bedeutet: $\dim N(T_A) = n - rkA$

Gruppe

$(G, *)$: Menge $G : G \neq \emptyset$ Verknüpfung $* : G \times G \to G$

- **Assoziativ**: $a * (b * c) = (a * b) * c$
- **Neutrales Element**: $a * e = a = a * e$
- **Inverses Element**: $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Abelsche Gruppe ist zusätzlich kommutativ: $a * b = b * a$

Halbgruppe benötigt kein Inverses Element

Symmetrische Gruppe: Gruppe aller Permutationen $(S_n, \circ)$

Rechenregeln: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

$a * b = a * c \Rightarrow b = c \qquad a * b = e \Rightarrow a = b^{-1}$

Körper

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{K}, +)$ ist kommutative Gruppe $a + (-a) = 0$
- $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- Distributiv: $a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc$

Körper sind **Nullteilerfrei** $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Linearer Raum / Vektorraum

Linearer Raum $(X, +, \cdot)$ (über Körper $\mathbb{K}$) Menge $X \neq \emptyset$

- **Addition** $+$: $X \times X \to X$. $(X, +)$ ist kommutative Gruppe
- **Skalare Multiplikation** $\cdot$: $\mathbb{K} \times X \to X$, so dass gilt:
  - Distributivgesetz: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
  - Distributivgesetz: $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$
  - Assoziativgesetz: $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
  - Neutrales Element: $1 \cdot x = x; 1 \in \mathbb{K}$

  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in X$

Unterraum: $Y \subseteq X$ ist Unterraum, falls gilt: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}; y_1, y_2 \in Y$; $\{0\}, X$ sind Unterräume von X.

$\cap, +$ von Unterräumen ergeben wieder Unterraum. $\cup$ i.A. nicht.

Lineare Hülle / Spann

Menge aller Linearkombinationen

$span\{x_1, ..., x_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\}$

$span\{\emptyset\} = \{0\}$ ($\Rightarrow \dim(\{0\} = 0)$)

Lineare Abhängigkeit

Nur triviale Lsg für Linearkombinationen $\{x_1, ..., x_n\}$ sind linear unabhängig, wenn gilt: $\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = 0 \Rightarrow \xi = 0$

$\emptyset$ ist linear unabhängig. 0 ist linear abhängig.

Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig

Basis und Erzeugendes System

$\mathcal{X}$ heißt EZS von X, wenn gilt $X = span\mathcal{X}$. Eine Basis ist EZS mit $\mathcal{X}$ ist linear unabhängig.

Standardbasis besteht aus kanonischen Vektoren $(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 1)$

Mit $\mathcal{X} \subseteq X, \mathcal{X} \neq \emptyset$ ist äquivalent:

- $\mathcal{X}$ ist Basis von X
- Jedes $x \in X$ darstellbar als Linearkombination von $\mathcal{X}$
- $\mathcal{X}$ ist maximal linear unabhängig
- $\mathcal{X}$ ist minimales EZS

Austauschsatz von Steiniz Austausch von linear unabhängigen Vektoren eines EZS ergibt wieder EZS

Dimension Enthält eine Basis von X n Elemente gilt: $n = \dim X$

Dimensionen: $\dim \mathbb{K}^n = n \quad \dim \mathbb{K}^{m \times n} = mn \quad \dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$

Für X ist Vektorraum, $n := \dim X$ gilt:

- Weniger als n Vektoren sind kein EZS
- Mehr als n Vektoren sind linear abhängig
- Jedes EZS mit n Elementen ist eine Basis
- Jede linear unabhängige Menge mit n Elementen ist Basis

Direkte Summe

Y_2 ist **Komplement** zu Y_1, wenn gilt

- $Y_1 + Y_2 = X$
- $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

$X = Y_1 \oplus Y_2$ ist **direkte Summe** von Y_1 und Y_2.

$\forall$ Y = Unterraum von $X; \dim X < \infty$ gilt: Y hat ein Komplement.

Lineare Abbildung

$T : X \to Y$ über $\mathbb{K}$, $T \in L(X, Y)$ erfüllt:

$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$

$T0 = 0$; $T_A(x) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m := Ax$ $(A \in \mathbb{K}^{m \times n})$

Kern $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ (Nullraum)

Bild $R(T) := TX$

Rang $rkT := \dim R(T)$ $(rkT_A = rkA)$

Injektiv: $N(T) = \{0\}$ ($T_A : L_0$ hat nur triviale Lösung)

Surjektiv: $R(T) = Y$

Dimensionssatz: $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X$

Affine Abbildung

S ist affine Abb.: $S : X \to Y : S(x) = Tx + y$.

S ist linear, falls $y = 0$

Isomorphismus

Bijektive Abbildung heißt Isomorphismus
$GL(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : T \text{ bijektiv}\}$
Isomorph: $X \cong Y$
$S \subseteq X$ ist linear (un)abhängig $\Leftrightarrow TS \subseteq Y$ ist linear (un)abhängig
$X \cong Y \Leftrightarrow \dim X = \dim Y$
Isomorphe Vektorräume sind Äquivalenzklasse über allen Vektorräumen
Transponieren (A^T) ist Isomorphismus $\Rightarrow$ Spaltenraum $\cong$ Zeilenraum
Für $T \in L(X,Y)$ mit $\dim X = \dim Y$ sind äquivalent:

- T ist Isomorphismus (d.h. $T \in GL(X,Y)$)
- T ist injektiv
- T ist surjektiv

Lineare Abbildungen und Matrizen

Darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ stellt $T \in L(X,Y)$ dar.
T besitzt Standardbasen: $T = T_{T_{\mathcal{E}_n}}^{\mathcal{E}_m}$
Jedes $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ besitzt $T \in L(X,Y)$ mit $A = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$
Für $\dim X, \dim Y < \infty$ gilt:

- $L(X,Y) \cong \mathbb{K}^{\dim Y \times \dim X}$
- $\dim L(X,Y) = \dim X \cdot \dim Y$

Für $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$ gilt $(S \circ T)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} = S_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$
Für $A \in \mathbb{K}^{l\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $T_A \circ T_B = T_{AB}$
Rang einer Linearen Abbildung $rkT_A = rkA$
Intvertierbarkeit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, falls $\exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} : AB = I_n$
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A invertierbar gdw. $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$
Reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist regulär gdw. $rkA = n$. Sonst singulär.
Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist äquivalent:

- $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$
- A ist regulär ($rkA = n$)
- Zeilen von A sind linear unabhängig
- Spalten von A sind linear unabhängig
- L_0 hat nur triviale Lösung
- $\forall\, b \in \mathbb{K}^n$ ist L_b eindeutig lösbar
- $\det A \neq 0$

Augmentierte Koeffizientenmatrix $(A,b) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$
L_b lösbar gdw. $rkA = rk(A,b)$
Basiswechselmatrix Jede invertierbare Matrx definiert Basiswechsel
$S = (s)_{1\le i,j\le n}$ mit $x'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} x_i$ für $1 \le j \le n$
$T_{\mathcal{X}'} = S^{-1} T_{\mathcal{X}} S$
Ähnlichkeit $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind ähnlich, wenn $\exists\, S : B = S^{-1}AS$
Darstellungsmatrizen sind ähnlich vermöge der Basiswechselmatrix

Determinanten

Permutationen $\sigma \in (S_n, \circ) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$
Signum $sgn\sigma := (-1)^s(\sigma)$ mit $s(\sigma)$ ist Anzahl der Paare $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \le i \le j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Signum $+1$ für gerade Anzahl an Vertauschungen zweier Elemente. -1 für ungerade Anzahl.
$sgn\ \sigma \circ \tau = sgn\ \sigma \circ sgn\ \tau$
$sgn\ \sigma^{-1} = sgn\ \sigma\ \forall\ \sigma \in S_n$
Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

$\det 0 = 0 \quad \det I_n = 1 \quad \det A = \det A^T$
A enthält Nullzeile $\Rightarrow \det A = 0$
B entsteht durch Permutation der Spalten von $A \Rightarrow \det B = sgn\ \sigma \det A$
2 Zeilen / Spalten sind linear abhängig $\Rightarrow \det A = 0$
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär gdw. $\det A \neq 0$. Dann gilt: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten
Det einer Linearen Abbildung ist Det einer darstellenden Matrix
Entwicklung der Determinante (nach k-ter Zeile)
$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj}\ \det A_{kj}$
$A_{kl} := (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n, i\neq k \\ 1\le j\le n, j\neq l}} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$
Determinante einer Dreiecksmatrix $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
Det Inverser Matrix $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{ji}) \quad 1 \le i,j \le n$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwert $Tx = \lambda x$: λ ist Eigenwert zu **Eigenvektor** x. Geometrische Vielfachheit ist Dimension von E_λ. Eigenvektoren sind lin. unabh.
$n = \dim X < \infty$: T hat höchstens n verschiedene Eigenwerte
Eigenraum $E_\lambda := N(T - \lambda I_n)$
Spektrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{K}$ ist Menge aller Eigenwerte
$T \in L(X)$ hat nichttrivialen Kern, wenn $0 \in \sigma(T)$.
$\dim X < \infty$: T invertierbar gdw. $0 \notin \sigma(T)$.
E_σ ist **invariant**, d.h. $x \in E_\lambda \Rightarrow Tx \in E_\lambda$. Es gilt $S_{\mathcal{X}} = diag(\lambda, ..., \lambda)$.
Also ist $\det T = \prod_{i=1}^n \lambda_i, trT = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
$E_\lambda = L_0$ nichttrivial: $[A - \lambda I_n]x = 0$
Shift-Operator $(Tx)_k := x_{k+1}, T \in L(X)$ über Folgenraum $X := F(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$; $\sigma(T) = \mathbb{K}\backslash\{0\}$; $Tx^\lambda = \lambda x^\lambda$ mit geom. Vielfachheit 1.

Charakteristisches Polynom

$\chi_T(t) = \det(T_{\mathcal{X}} - tIn)$
für $T \in L(X)$ mit $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$
$\chi_{T_A}(t) = c_n t^n + .. + c_1 t + c_0; c_n = (-1)^n, c_{n-1} = (-1)^{n-1} trA, c_0 = \det A$
Spur $trA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
Zerfällt in Linearfaktoren für $\chi(t) \equiv \mu \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$. λ_i sind NST.
Algebraische Vielfachheit ist vielfachheit der NST.
$\mathbb{K}$ ist **algebraisch abgeschlossen** falls jedes Polynom mit $\deg p > 0$ mindestens eine NST hat. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. $\mathbb{R}$ nicht. Wenn $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ Jedes $T \in L(X)$ hat mind. 1 Eigenwert.
geometrische Vielfachheit $\le$ algebraische Vielfachheit

Diagonalisierung und Trigonalisierung

$T \in L(X)$
Trigonalisierbar, wenn χ_T in Linearfaktoren zerfällt
Diagonalisierbar, wenn trigonalisierbar und $\forall\ \lambda$: geom. V. = alg. V.
$\forall\ T \in L(X) : \dim X < \infty$ gilt: T ist über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar.
T trigonalisierbar: $\det T = \prod_{j=1}^n \lambda_j, \quad trT = \sum_{j=1}^n \lambda_j$
Jordan-Normalform $T_{\mathcal{X}} = diag(J_1, ..., J_i)$ mit $1 \le i \le n$
Satz von Cayley-Hamilton $\chi_T(T) = 0$
Für $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt: $A^2 = (trA)A - (\det A)I_2$

Skalarprodukt

auf X: $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$
In $\mathbb{C}$ $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ **In** $\mathbb{R}$ $\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$

- **Linear im 1. Argument** $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$
- **Semilinear im 2. Argument** $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$
- **Konjugierte Symmetrie** $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
- **Positive Definitheit** $\langle x,x\rangle \ge 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$

Normierter Vektor $y := \frac{1}{|x|}x$
Orthogonal $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$ ($\langle x,0\rangle = \langle 0,x\rangle = 0$)
Gewicht $\omega_1, ..., \omega_n > 0$: $\langle x,y\rangle_\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j x_j \bar{y}_j; |x|_\omega = \sqrt{\sum_{j=1}^n \omega_j |x_j|^2}$
Orthogonales Komplement $S^\perp := \{x \in X : \langle x,y\rangle = 0 : \forall y \in S\}$
Für $S \in X$ ist $S^\perp$ Unterraum. $(spanS) \cap S^\perp = \{0\}$
Ist $\dim X < \infty$, Y Unterraum von X, so gilt

- $X = Y \oplus Y^\perp$
- $(Y^\perp)^\perp = Y$
- $\dim X = \dim Y + \dim Y^\perp$

Orthogonale Familie $S : \langle x,y\rangle = 0 : \forall\ x,y \in S, x \neq y$
Orthonormale Familie $S : \langle x,y\rangle = \begin{cases} 1, x = y \\ 0, x \neq y \end{cases} \ \forall\ x,y \in \mathcal{S}$
Orthogonale Familie mit $0 \notin S$ ist linear unabhängig
Orthonormalbasis $x = \sum_{j=1}^n \langle x, x_j\rangle x_j : \forall x \in X$
Gram-Schmidt S ist lin. unabh. Fam. mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$; $y_1 := x_1$
$y_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle x_{k+1}, y_j\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} y_j$; Dann normalisieren möglich.
Jeder Raum mit $\dim X < \infty$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ besitzt Orthonormalbasis

Adjungierte Abbildung

$T' : \langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle : \forall x,y \in X$
Funktional $y'(x) := \langle x,y\rangle : \forall x \in X$
Semilinear $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)' = \overline{\alpha_1} T_1' + \overline{\alpha_2} T_2'$
$T \in GL(X) \Rightarrow T' \in GL(X)$, mit $(T')^{-1} = (T^{-1})'$
Transponierte (in $\mathbb{R}$): $A' = A^T$
Hermit'sche (in $\mathbb{C}$): $A' = A^* = \overline{(A^T)}$
$\dim X < \infty, T \in L(X) : \quad N(T') = R(T)^\perp \quad rkT = rkT'$

Selbstadjungierte Abbildung

$T = T'$
Wenn also gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle : \forall x,y \in X$
T_A über $\mathbb{R}$ ist selbstaduj., für $T_{\mathcal{E}_n}$ symm. ($A = A^T$); über $\mathbb{C}$, für $A = A^*$
$\dim X < \infty$, $T \in L(X)$ sei selbstadjungiert

- $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
- $\exists$ Orthonormalbasis von X aus Eigenvektoren von T

Selbstadjungierte Abbildungen sind Diagonalisierbar